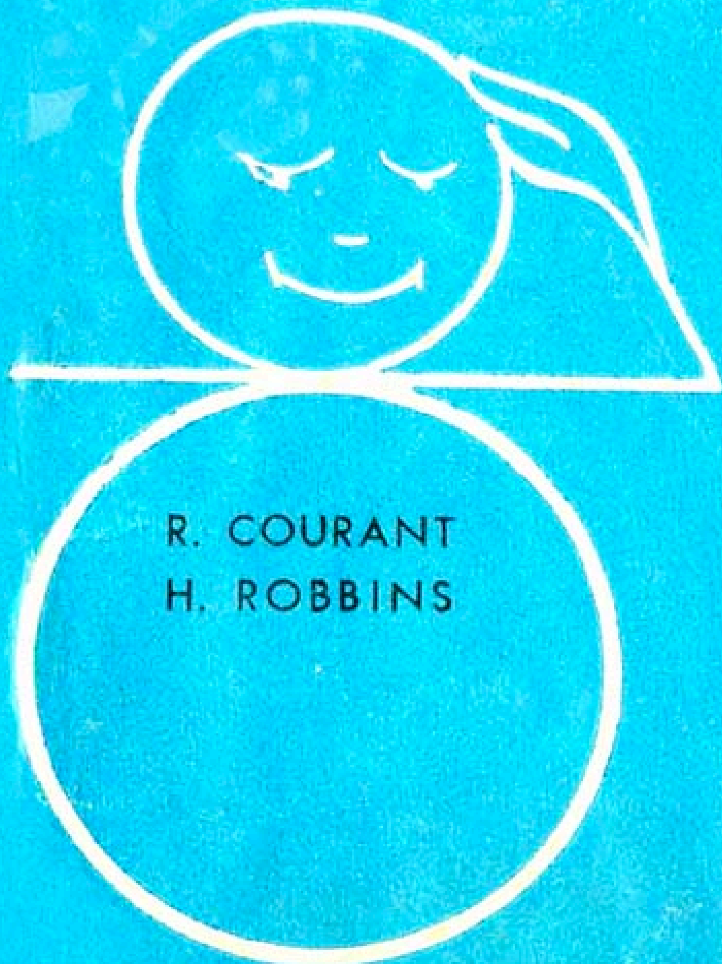
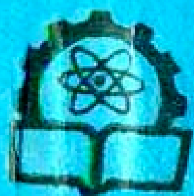


R. COURANT
H. ROBBINS

TOÁN HỌC là gì?

TẬP I



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



Thân tặng Mối tình Đầu

Tôi không tìm kiếm những người bạn hoàn hảo .
Tôi tìm kiếm những người bạn có cùng đam mê
sở thích và bổ sung những chỗ khuyết cho tôi.
Để tôi ngày một hoàn thiện hơn trong đam mê
và trong trưởng thành .

Quân

R. COURANT, H. ROBBINS

TOÁN HỌC LÀ GÌ?

(Phác thảo sơ cấp về tư tưởng và phương pháp)

Người dịch: Hàn Liên Hải

TẬP 1

- otoanhoc2911@gmail.com -



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI – 1985

Nguyên bản tiếng Anh
Dịch từ bản tiếng Nga

Р. КУРАНТ, Г. РОББИНС

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

Элементарный очерк идей и методов)

Издательство «Просвещение», Москва, 1967.

LỜI TỰA
CHO LẦN XUẤT BẢN ĐẦU TIÊN

Trong suốt khoảng thời gian hơn hai nghìn năm, việc nắm được một số kiến thức không quá hời hợt trong phạm vi toán học đã là một bộ phận cần thiết trong vốn liếng trí tuệ của mỗi người có học vấn. Ngày nay, một mối nguy cơ lớn đang đe dọa truyền thống đó của giá trị giáo dưỡng của toán học. Tiếc rằng, trong vấn đề này những đại biểu có uy tín của khoa học toán học còn tỏ ra thiếu trách nhiệm. Việc giảng dạy toán thường thường còn mang tính chất những bài tập khuôn sáo có thể dẫn đến sự phát triển những kỹ năng hình thức nào đó mà không thâm nhập sâu sắc vào đối tượng đang nghiên cứu và không thực sự giúp cho sự phát triển tự do của tư tưởng. Các công trình nghiên cứu khoa học đã có xu hướng trừu tượng hóa và chuyên biệt hóa cao độ. Những ứng dụng và những mối quan hệ tương hỗ đã không được chú ý đầy đủ. Và mọi điều kiện tiên quyết kém thuận lợi đó hoàn toàn không thể biện minh cho một chính sách đầu hàng về quan điểm. Ngược lại, những ai hiểu được giá trị của văn hóa trí tuệ không thể không đứng lên và đã đứng lên đấu tranh bảo vệ nó. Các thầy giáo, học sinh và tất cả những người có học vấn không có liên hệ gì với nhà trường đều không muốn đi theo con đường ít chông gai nhất, đã không hạ vũ khí mà đã bắt tay vào công cuộc cải cách giảng dạy. Mục tiêu là sự thông hiểu đầy đủ bản chất của toán học xem như một cơ thể toàn vẹn và xem toán học như cơ sở của tư duy khoa học và mẫu phong cách hoạt động.

Một số cuốn sách nổi tiếng có nội dung lịch sử và tiểu sử và những bài diễn văn chính luận đã làm thức tỉnh nhiều người dường như thờ ơ với toán học, nhưng thực ra không bao giờ

ngừng quan tâm đến nó. Song không thể dạy được tri thức mà chỉ nhờ vào các phương tiện gián tiếp. Không thể đạt được sự thông hiểu toán học chỉ bằng những phương pháp giải trí nhẹ nhàng, cũng như không thể hiểu biết âm nhạc bằng cách đọc các bài báo (dù chúng được viết rõ đến mức nào), nếu như không *học* nghe một cách chú ý và tập trung. Không thể tránh khỏi sự tiếp xúc thực sự với bản thân nội dung của khoa học toán học sinh động. Mặt khác, khi trình bày toán học thoát khỏi tinh thần lạc hậu của nhà trường và tránh chủ nghĩa giáo điều cứng nhắc, từ chối những nguyên cớ và những sự chỉ dẫn về mục đích, cần phải tránh tất cả những gì quá cồng kềnh và giả tạo của chủ nghĩa giáo điều, đó chính là một trở ngại đáng ghét đối với mọi sự cố gắng chân thật. Chẳng lẽ không thể được nếu bắt đầu từ những yếu tố và đi theo con đường trực tiếp để đạt tới những điểm cao mà từ đó có thể nhìn rõ cái bản chất nhất và những động lực của toán học hiện đại.

Cuốn sách này định thử làm một công việc như vậy. Vì nó không đòi hỏi những hiểu biết gì mới ngoài những điều đã được trình bày trong một giáo trình tốt ở nhà trường, cho nên có thể gọi nó là một cuốn sách phổ cập. Song nó không theo một xu hướng nguy hiểm là thủ tiêu mọi sự cố gắng suy nghĩ, mọi sự luyện tập. Nó đòi hỏi một mức độ trưởng thành nhất định về trí tuệ và một trình độ tiếp thu các lập luận được trình bày. Cuốn sách được viết cho những người bắt đầu học và cho những cán bộ khoa học, cho học sinh và thầy giáo, cho các nhà triết học và các kỹ sư, nó có thể được dùng làm sách giáo khoa để tự học. Có lẽ, ý định phục vụ cho một lớp rộng rãi bạn đọc như thế là quá đỗi can đảm và tự tin. Phải thừa nhận rằng, do áp lực của một tác phẩm khác mà khi cho cuốn sách này ra mắt bạn đọc, chúng tôi buộc phải đi đến một sự thỏa hiệp: công việc chuẩn bị đã được tiến hành nhiều năm nhưng chưa thực sự kết thúc. Chúng tôi rất vui mừng chờ đón những lời phê bình và sẵn sàng đón nghe những ý kiến đóng góp của các bạn.

Nếu như trách nhiệm về ý định và nội dung triết học của cuốn sách này thuộc về người ký tên dưới đây thì tôi xin chia xẻ phần công lao xứng đáng về giá trị của cuốn sách (nếu có) với Herbert Robbinx. Ông đã dành cho tác phẩm này một sự chú ý đặc biệt như chính công trình của bản thân

mình ngay từ khi tiếp xúc với nó dưới dạng sơ thảo và sự cộng tác của ông đã có vai trò quyết định làm cho cuốn sách được như ngày nay. Cuối cùng tôi xin biểu thị lòng cảm ơn sâu sắc trước sự giúp đỡ của nhiều bè bạn. Các cuộc tọa đàm với Niels Bohr, Kurt Fridrix và Otto Nêygêbauer đã có ảnh hưởng đến một số quan điểm của tôi về các vấn đề có tính chất triết học và lịch sử. Edna Kramer đã cho nhiều ý kiến phê bình xây dựng về mặt sư phạm. David Hilbark đã viết những bài giảng, sau đó đã là cơ sở cho cuốn sách. Ernext Kurant, Norman Đêvidx, Sarlx đơ Prima, Alfred Gorn, Herbert Mintxer, Vonfrank Vazoh và những người khác đã đóng góp rất nhiều công sức sửa chữa và đánh máy bản thảo. Donald Flenderx đã cho nhiều ý kiến quý báu và sửa chữa cẩn thận bản thảo. Djon Knudxen, Herta fôn Humpenberg, Irvink Ritter và Otto Nêygêbauer đã chuẩn bị cho các hình vẽ v.v... Tôi cũng xin cảm tạ nhà xuất bản Waverly Press, đặc biệt ngài K.Orta về sự làm việc có chất lượng rất cao và cảm tạ nhà xuất bản Oxford University Press, đặc biệt ngài U. Oman và Filip Vodron về sángkiến và sự ủng hộ.

Niu — Rosel (New York)
22 tháng 3 năm 1941 R. Courant

LỜI TỰA CHO LẦN XUẤT BẢN THỨ HAI, THỨ BA VÀ THỨ TƯ

Trong những năm gần đây, nhu cầu thông tin toán học và tài liệu chỉ dẫn tương ứng ngày càng tăng. Hơn lúc nào hết, hiện nay có nguy cơ của sự chán ngán, nếu như học sinh (và giáo viên) không nhận ra và nắm được bản chất và nội dung của toán học đằng sau các công thức và các biến đổi. Đối với những ai đã nhìn thấy sâu hơn những điều đã viết trong cuốn sách này và những lời bình phẩm đối với lần xuất bản thứ nhất đã củng cố trong các tác giả niềm tin rằng cuốn sách có bổ ích.

Chúng tôi xin cảm tạ những bạn đọc mà những lời phê bình đã giúp chúng tôi đính chính lại và hoàn thiện thêm trong những lần xuất bản sau. Để chuẩn bị cho lần in thứ tư, bà Natasa Artin đã đóng góp rất nhiều, chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

18-3-1943
10-10-1945
28-10-1947

R. COURANT

CÁCH DÙNG SÁCH

Trật tự trình bày trong sách là có hệ thống, nhưng điều này hoàn toàn không có nghĩa bắt buộc bạn đọc phải xem lần lượt trang này sang trang khác, chương nọ tiếp chương kia. Về căn bản, các chương độc lập với nhau. Thông thường thì phần đầu chương là dễ hiểu, nhưng sau đó con đường đi sẽ từ từ leo dốc, đến cuối chương và phần phụ lục của nó thì càng dốc hơn. Bởi thế, bạn đọc nào cần sớm có một thông tin tổng quát, hơn là việc lĩnh hội những kiến thức chuyên ngành thì có thể đọc theo nguyên tắc bỏ qua những khảo sát chi tiết.

Học sinh có trình độ toán học hạn chế thì nên lựa chọn theo sở thích của mình. Các dấu sao và dòng in chữ nhỏ đánh dấu những phần có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên mà không phương hại gì nghiêm trọng cho việc nhận thức phần tiếp sau. Hơn thế nữa, nếu trong khi đọc sách mà bạn đọc tự giới hạn ở những phần hoặc những chương mà mình quan tâm đến nhiều nhất thì cũng không có trở ngại gì.

Các thầy giáo trường phổ thông sẽ tìm thấy, trong những chương dành cho các phép dựng hình học và cực đại, cực tiểu, tài liệu để hoạt động ngoại khóa và bồi dưỡng học sinh giỏi.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách có thể phục vụ cho học sinh các lớp khác nhau ở trường phổ thông và cho những

người thuộc ngành nghề khác nhau thực sự quan tâm đến các vấn đề kiến thức chính xác. Nó có thể làm cơ sở cho các giáo trình tự chọn về các khái niệm toán học cơ bản trong các trường phổ thông. Các chương III, IV, V phù hợp với giáo trình hình học, các chương VI và VIII gộp lại trình bày trọn vẹn các cơ sở của giải tích với mục đích thông hiểu nhiều hơn là đạt tới sự hoàn thiện về kỹ thuật. Các thày giáo có thể sử dụng chúng làm bài mở đầu để bổ sung giáo trình cho phù hợp với các nhu cầu riêng biệt nào đó và làm cho giáo trình phong phú thêm bởi những thí dụ nhiều loại khác nhau.

Chúng tôi hy vọng rằng cả những chuyên gia cũng sẽ thày được một số chi tiết và một số lập luận sơ cấp đáng lưu ý chứa đựng trong bản thân chúng mầm mống của những tư tưởng rộng lớn hơn.

TOÁN HỌC LÀ GÌ?

Toán học chứa đựng trong bản thân nó những đặc điểm của hoạt động lý trí, của lập luận trừu tượng và hướng tới sự hoàn thiện về thẩm mỹ. Những yếu tố cơ bản và đối lập lẫn nhau của nó là logic và trực giác, giải tích và phép dựng hình, tính khái quát và tính cụ thể. Với mọi quan điểm khác nhau bắt nguồn từ những truyền thống này hay truyền thống khác, sự tác động đồng thời của những thái cực đó và sự đấu tranh để tổng hợp chúng lại sẽ đảm bảo cho sức sống, sự bổ ích và giá trị cao của khoa học toán học.

Không nghi ngờ gì nữa, sự tiến lên trong phạm vi toán học được qui định bởi sự phát sinh những nhu cầu có tính chất thực tiễn nhất định. Nhưng, tất yếu phải có một cái đà nội tại vượt ra ngoài giới hạn của lợi ích trực tiếp. Sự biến đổi từ một khoa học ứng dụng sang một khoa học lý thuyết như vậy đã diễn ra trong lịch sử xa xưa, song ngày nay cũng vẫn còn như thế: chỉ cần để ý đến sự đóng góp của các kỹ sư và các nhà vật lý trong toán học hiện đại cũng đủ rõ. Những phong cách tư duy toán học cổ xưa nhất đã xuất hiện ở

phương Đông khoảng hai nghìn năm trước công nguyên: người Babilon đã tập hợp được chất liệu phong phú, cái mà ngày nay ta có xu hướng xếp vào đại số sơ cấp. Nhưng, từ « toán học » được xem như một khoa học theo ý nghĩa hiện nay, đã phát sinh chậm hơn ở trên mảnh đất Hy Lạp vào khoảng thế kỷ thứ tư và thứ năm trước công nguyên. Mọi sự tiếp xúc ngày càng tăng giữa Phương Đông và Hy Lạp bắt đầu từ đế quốc Ba Tư và đạt tới tột đỉnh trong thời kỳ tiếp ngay sau cuộc du lịch của Alekxănđrơ đã bảo đảm cho người Hy Lạp đuổi kịp những thành tựu của người Babilon trong lĩnh vực toán học và thiên văn học. Toán học đã nhanh chóng trở thành đối tượng của các cuộc thảo luận về triết học thông thường tại các Nhà nước – Thành phố Hy Lạp. Như vậy, các nhà tư tưởng Hy Lạp đã nhận thức được những khó khăn đặc biệt có liên quan với các khái niệm toán học cơ bản — sự liên tục, sự chuyển động, cái vô hạn – và với bài toán đo các đại lượng tùy ý bằng các đơn vị cho trước. Nhưng đã có quyết tâm vượt khó khăn: nảy sinh do kết quả của một sự cố gắng tuyệt vời của tư tưởng Evđôkxôp, lý thuyết continum hình học là một thành tựu có thể sánh ngang hàng với lý thuyết số vô tỉ hiện đại. Phương hướng tiên đề suy diễn trong toán học, bắt đầu từ Evđôkxôv, đã được thể hiện rất rõ trong tác phẩm « Khởi đầu » của Ơclid.

Mặc dầu xu hướng tiên đề — lý thuyết vẫn là một trong những đặc điểm nổi bật nhất của toán học Hy Lạp và tự nó đã ảnh hưởng lớn đến sự phát triển sau này của khoa học, nhưng cũng cần phải kiên quyết chỉ rõ rằng vai trò của các nhu cầu thực tiễn và mối liên hệ với thực tại vật lý không hề bị hạ thấp chút nào trong việc sáng tạo ra toán học cổ xưa và rằng việc trình bày toán học không theo phong cách chặt chẽ của Ơclid vẫn được ưa thích hơn.

Sự phát hiện quá sớm những khó khăn có liên quan tới các đại lượng « vô ước » đã cản trở những người Hy Lạp phát triển nghệ thuật tính toán bằng số mà trong những thời kỳ trước đấy đã tạo ra những thành tựu đáng kể ở Phương Đông. Thay thế vào đó, họ đi tìm những con đường trong rừng rậm của hình học tiên đề thuần túy. Thế là bắt đầu một trong những cuộc phiêu lưu lạ lùng trong lịch sử khoa học mà trong đó có thể bỏ lỡ những khả năng sáng lạn. Gần như trong suốt

hai nghìn năm, sự thống trị của truyền thống hình học Hy Lạp dã ngăn cản sự tiến hóa của tư tưởng về số và của phép tính bằng chữ mà sau này đã được đặt làm cơ sở của các khoa học chính xác.

Sau một thời kỳ tập trung sức lực chậm chạp, một thời kỳ cách mạng bão táp trong sự phát triển của toán học và vật lý học đã được mở ra cùng với sự nảy sinh hình học giải tích và phép tính vi tích phân trong thế kỷ XVII. Trong các thế kỷ XVII và XVIII, lý tưởng kết tinh tiên đề hóa và suy diễn hệ thống đã tàn lụi đi và đã mất ảnh hưởng, tuy rằng hình học cổ xưa vẫn tiếp tục được đánh giá cao. Sự tư duy logic hoàn hảo xuất phát từ những định nghĩa rành mạch và từ những tiên đề «hiển nhiên» không mâu thuẫn với nhau đã không còn làm vừa lòng những người khai phá kiến thức toán học mới. Đắm mình trong những dự đoán trực giác, bằng cách pha trộn những kết luận hiển nhiên với những khẳng định huyền bí phi lý, bằng cách tin tưởng mù quáng vào lực lượng siêu đẳng của các qui trình hình thức, họ đã phát hiện ra một thế giới toán học mới vô cùng phong phú. Song dần dà, trạng thái phấn chấn cao độ của tư tưởng được cổ vũ bởi những thắng lợi oanh liệt, đã nhường chỗ cho thái độ thận trọng và ý thức phê bình. Trong thế kỷ XIX, ý thức về sự cần thiết phải củng cố khoa học, đặc biệt có liên quan tới những nhu cầu của giáo dục cao đẳng, được phát triển rộng rãi sau cách mạng Pháp, đã dẫn tới sự xét lại cơ sở của toán học mới. Họ đã đặc biệt chú ý tới phép tính vi tích phân và việc làm sáng tỏ khái niệm giới hạn. Như vậy, thế kỷ XIX không những đã trở nên một kỷ nguyên của những thắng lợi mới mà còn được đánh dấu bởi sự quay trở lại có kết quả lý tưởng cổ điển về sự chính xác và chặt chẽ của các chứng minh. Về mặt này thì khuôn mẫu Hy Lạp đã bị vượt qua. Một lần nữa, con lắc đã nghiêng về phía sự hoàn hảo lôgic và sự trừu tượng. Hiện nay, chúng ta còn chưa vượt ra khỏi thời kỳ đó, dẫu rằng có cơ sở để hy vọng sự gián đoạn đáng buồn được tạo nên giữa toán học thuần túy và những ứng dụng sinh động của nó có thể được thay thế bởi sự thống nhất chặt chẽ hơn trong thời kỳ xét lại có phê phán. Ngày nay, một khối lượng những lực nội tại sáng tạo và sự đơn giản hóa cao độ đạt được trên cơ sở của sự thấu hiểu đã cho phép ta sử dụng một lý thuyết

toán học sao cho những ứng dụng không bị bỏ qua. Việc thiết lập lại mối liên hệ hữu cơ giữa tri thức thuần túy và tri thức ứng dụng, sự cân bằng lành mạnh giữa tính khái quát trừu tượng và tính cụ thể phong phú chính là nhiệm vụ của toán học trong một tương lai gần đây.

Ở đây ta không có điều kiện phân tích học về mặt triết học hoặc tâm lý học một cách tỉ mỉ. Chỉ muốn nhấn mạch vào một số thời điểm. Theo tôi, việc nhấn mạnh quá đáng tính chất tiên đề—suy diễn của toán học là nguy hiểm. Tất nhiên cái khởi đầu của sự sáng tạo có tính chất kiến thiết. Khó ai có thể chứa chất trong các diễn đạt triết học cái khởi đầu trực giác — là nguồn gốc của các tư tưởng của chúng ta và những luận cứ của chúng ta; tuy nhiên cái khởi đầu đó lại là bản chất thực sư của mọi phát minh toán học, kể cả khi nó thuộc vào những lĩnh vực trừu tượng nhất. Nếu một hình thức suy diễn rành mạch là mục đích thì động lực của toán học phải là trực giác và; kiến thiết. Trong giả thiết cho rằng, toán học là một hệ thống các hệ quả rút ra từ các định nghĩa và tiên đề chỉ cần tương thích với nhau, bộ phận còn lại là sản phẩm của sự tưởng tượng tự do của nhà toán học, chứa trong nó mối đe dọa nghiêm trọng đối với bản thân sự tồn tại của khoa học. Nếu thực sự như vậy thì toán học sẽ làm một việc không xứng đáng của con người biết suy nghĩ. Nó chỉ là một trò chơi với các định nghĩa, qui tắc và phép tam đoạn luận mà không có nguyên nhân, không có mục đích. Biểu tượng theo đó trí tuệ con người có thể sáng tạo ra những hệ tiên đề đã mất mọi ý nghĩa, sẽ là một sự lừa dối. Chỉ có thể thu được những kết quả có giá trị khoa học nếu thấy rõ trách nhiệm nặng nề trước thiên nhiên và tuân theo một nhu cầu nội tại nào đó.

Tuy xu hướng giải tích logic suy tưởng chưa phải là toàn bộ toán học nhưng nó cũng giúp chúng ta nhận thức sâu sắc hơn những sự kiện toán học và những sự phụ thuộc lẫn nhau giữa chúng và giúp ta nắm vững hơn bản chất các khái niệm toán học. Chính từ xu hướng đó đã nảy sinh ra một quan điểm hiện đại đối với toán học xem như mẫu mực của một phương pháp khoa học được áp dụng vạn năng.

Dù ta đứng trên một quan điểm triết học nào thì mọi nhiệm vụ nghiên cứu khoa học đều được quy về thái độ của ta đối với các sự vật được cảm thụ và đối với các công cụ nghiên cứu. Tất nhiên, bản thân sự cảm thụ chưa phải là tri thức, chưa phải là sự thông hiểu; còn phải phù hợp chúng với nhau và cắt nghĩa bằng thuật ngữ một số nội dung cơ bản đằng sau chúng. « Vật tự thân » không phải là đối tượng trực tiếp của một nghiên cứu vật lý mà thuộc về lĩnh vực siêu hình. Nhưng đối với một phương pháp khoa học thì điều quan trọng là sự từ bỏ các suy luận siêu hình, chung qui là sự biểu thị mọi sự kiện quan sát được dưới dạng các khái niệm và các phép dựng. Sự từ bỏ tham vọng nhận thức bản chất của « vật tự thân », nhận thức tinh chân lý cuối cùng cũng như sự giải đáp bản chất nội tại của thế giới, có thể sẽ là một gánh nặng về tâm lý đối với những người nhiệt tâm ngây thơ; nhưng sự từ bỏ đó lại có hiệu quả cao đối với sự phát triển của tư tưởng khoa học hiện đại.

Một số phát minh vĩ đại nhất về vật lý đã buộc ta phải tuân theo nguyên tắc thủ tiêu duy tâm siêu hình. Khi Anhstanh định đưa khái niệm « những sự kiện đồng thời, phát sinh từ những địa điểm khác nhau » vào số những hiện tượng quan sát và khi ông hiểu rằng niềm tin bản thân khái niệm này tất phải có một ý nghĩa chính xác nào đó mới chỉ là một tiên đoán siêu hình thì trong phát minh đó đã chứa đựng mầm mống của lý thuyết tương đối của ông. Khi Niels Bohr và các học trò của ông cân nhắc kỹ sự kiện một quan sát vật lý học tùy ý có liên quan đến tác dụng tương hỗ giữa dụng cụ và vật được quan sát thì ông đã thấy rõ rằng không thể có một định nghĩa vị trí và vận tốc của phần tử đồng thời chính xác theo nghĩa mà nó được hiểu trong vật lý. Những hệ quả xa hơn của phát minh này đã tạo nên hệ thống cơ lượng tử hiện đại mà ngày nay mỗi nhà vật lý học đều biết. Trong thế kỷ XIX đã có một tư tưởng thống trị, đó là tư tưởng cho rằng các lực cơ học và sự chuyển động của các phần tử trong không gian là các vật tự thân; còn điện, ánh sáng và từ có thể qui về các hiện tượng cơ học (hoặc « giải thích » bằng thuật ngữ cơ học) tương tự như đã làm đối với lý thuyết nhiệt. Khái niệm về một môi trường có tính chất giả định — gọi là môi trường « ê-te » — đã được đề xuất cho thích hợp

với những chuyển động cơ học không hoàn toàn chính đáng mà ta coi là ảnh sáng và điện. Dần dà đã thấy rõ ê te này không quan sát được, tức là khái niệm này thuộc về siêu hình nhiều hơn là thuộc về vật lý. Sau đó thì tư tưởng giải thích một cách cơ học các hiện tượng điện và ánh sáng và cùng với nó khái niệm vềête đã bị dứt khoát loại bỏ.

Trong toán học cũng có một tình huống tương tự như thế, thậm chí còn rõ ràng hơn. Trong nhiều thế kỷ, các nhà toán học đã xem những sự vật mà họ quan tâm — số, đường thẳng v.v.., như là những vật tự thân. Song vì những bản thể đó không thích hợp với những ý định mô tả chính xác nào về bản chất của chúng, trong các nhà toán học thế kỷ XIX đã hình thành một tư tưởng cho rằng vấn đề về giá trị của những khái niệm đó xem như những thực thể trong phạm vi toán học (và cả ở bất kỳ đâu) cũng đều không có ý nghĩa. Những khẳng định toán học mà những thuật ngữ đó thâm nhập vào hoàn toàn không thuộc về thực tại vật lý ; chúng chỉ thiết lập mối liên hệ tương hỗ giữa các « sự vật không xác định » và những qui tắc thao tác với những sự vật ấy. Không thể và không nên thảo luận trong toán học vấn đề điểm, đường thẳng và số, thực chất *là gì*. Điều thực sự quan trọng và có liên quan trực tiếp với các sự kiện « được khảo sát » là cấu trúc và mối liên hệ tương hỗ giữa các sự vật đó : hai điểm thì xác định một đường thẳng ; theo những qui tắc nhất định thì từ các số này ta suy ra được các số khác v.v...

Nhận thức được một cách rõ ràng sự cần thiết phải từ bỏ quan niệm cho rằng các khái niệm toán học cơ bản như là những sự vật có thực là một trong những chiến công quan trọng nhất của sự phát triển tiên đề hóa hiện nay của toán học.

May mắn thay, tư tưởng sáng tạo đang lãng quên đi những tín ngưỡng triết học giáo điều ngay khi mà những phát minh có tính chất kiến thiết còn quyến luyến chúng. Và đối với các chuyên gia cũng như đối với những người yêu thích toán học thì không phải triết học mà chỉ có sự tận tụy nghiên cứu bản thân toán học mới có thể trả lời được câu hỏi. Toán học là gì ?

CHƯƠNG I

SỐ TỰ NHIÊN

MỞ ĐẦU

Số là khái niệm cơ bản của toán học hiện đại. Nhưng số là gì? Nếu ta nói rằng $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ hoặc $(-1) \cdot (-1) = 1$ thì những điều khẳng định này có ý nghĩa gì? Trong nhà trường, ta nghiên cứu kỹ thuật tính toán với các phân số và với các số âm, tuy nhiên, muốn hiểu thực sự cách xây dựng một hệ thống số mà chỉ giới hạn trong phạm vi những kiến thức sơ cấp thì không đủ, mà phải đi xa hơn một chút nữa. Người Hy Lạp thời cổ đã dùng các khái niệm hình học «điểm» và «đường thẳng» làm cơ sở cho toán học của mình; nhưng xét cho cùng thì việc qui mọi khẳng định về các khẳng định đối với các *số tự nhiên* 1, 2, 3,... đã trở thành nguyên tắc chủ đạo của toán học hiện đại. «Thượng đế tạo ra số tự nhiên, còn mọi cái khác là công trình sáng tạo của con người». Với câu nói đó Lêôpôn Crônecke (1823 – 1891) đã xác định nền móng vững chắc của tòa nhà toán học.

Số dùng để đếm các vật thể có trong những tập hợp này hay tập hợp khác. Số dứt khoát không có liên hệ

gì với đặc điểm cá thể của các vật thể được đếm. Chẳng hạn, số « sáu » là kết quả của sự trừu tượng hóa nảy sinh ra khi xem xét các loại tập hợp gồm có sáu đối tượng: nó hoàn toàn không phụ thuộc vào các thuộc tính đặc thù của những vật thể đó, cũng không phụ thuộc vào các ký hiệu được dùng đến. Tuy nhiên tính chất trừu tượng của các tư tưởng về số chỉ trở nên sáng tỏ trên một mức độ phát triển rất cao về trí tuệ. Dưới con mắt của đứa trẻ thì các con số luôn luôn liên kết với các vật thể có thể sờ mó được như những ngón tay hoặc những hòn sỏi; trong ngôn ngữ của nhân dân thì các con số cũng được hiểu một cách cụ thể. Đó là các tổ hợp khác nhau về số lượng được dùng để biểu thị các vật thể khác loại nhau.

Chúng ta lợi dụng một điều là, nhà toán học (tự bản thân mình) không bắt buộc phải nghiên cứu vấn đề triết học của sự chuyển từ những tập hợp đối tượng cụ thể đến khái niệm số trừu tượng. Bởi thế, chúng ta coi các số tự nhiên như là những số cho trước cùng với hai phép toán cơ bản được thực hiện trên các số đó: phép cộng và phép nhân.

§ I. CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ TỰ NHIÊN

1. Các định luật số học. *Số học* là một lý thuyết toán học của các *số tự nhiên* (hoặc các số nguyên dương). Lý thuyết này dựa trên một sự kiện là, phép cộng và phép nhân các số nguyên tuân theo những định luật nào đó. Muốn diễn đạt những định luật đó một cách khái quát thì không thể dùng các ký hiệu hiểu 1, 2, 3 có liên quan đến những số cụ thể xác định. Khẳng định:

$$1 + 2 = 2 + 1$$

chỉ là trường hợp riêng của một định luật tổng quát, nội dung của nó là, tổng của hai số không phụ thuộc vào thứ tự mà xem xét chúng. Nếu ta muốn biểu thị một tư tưởng là có một hệ thức giữa các số nguyên, dù các số được xem xét như thế nào, thì ta biểu thị chúng bằng ký hiệu, chẳng hạn bằng các chữ a, b, c,... Nếu như sự thỏa thuận như vậy được thừa nhận thì việc diễn đạt năm định luật cơ bản của số học là dễ dàng và quen thuộc với bạn đọc :

1) $a + b = b + a$, 2) $ab = ba$,

3) $a + (b + c) = (a + b) + c$,

4) $a(bc) = (ab)c$, 5) $a(b + c) = ab + ac$.

Hai định luật đầu tiên — định luật *giao hoán* của phép cộng và định luật giao hoán của phép nhân — chỉ rằng, khi cộng và nhân có thể thay đổi thứ tự của các số mà trên đó ta thực hiện phép toán. Định luật thứ ba — định luật *kết hợp* của phép cộng — chỉ rằng, khi cộng ba số ta được cùng một kết quả như nhau mà không phụ thuộc vào việc ta cộng tổng của số thứ hai và số thứ ba vào số thứ nhất hay cộng số thứ ba vào tổng của số thứ nhất và số thứ hai. Định luật thứ tư là định luật kết hợp của phép nhân. Định luật cuối cùng là định luật *phân phối* xác nhận rằng, khi nhân một tổng với một số nguyên nào đó có thể nhân mỗi số hạng của tổng với số đó và cộng các tích tìm được lại.

Các định luật số học này rất đơn giản và thậm chí có vẻ hiển nhiên. Song cần lưu ý rằng chúng có thể không áp dụng được với các đối tượng khác không phải là số tự nhiên. Chẳng hạn, nếu a và b không biểu thị các số mà biểu thị các chất hóa học và nếu « phép cộng » được hiểu theo nghĩa thông thường thì dễ thấy

rằng định luật giao hoán của phép cộng không phải bao giờ cũng đúng. Thực vậy, nếu đổ axit sunfuric vào nước thì được dung dịch axit loãng nhưng nếu đổ



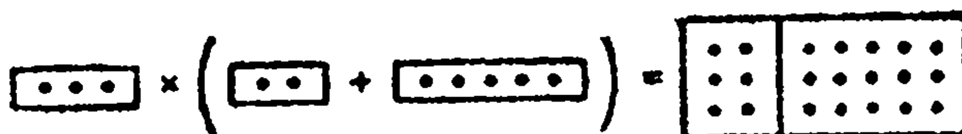
Hình 1. Phép cộng

nước vào axit sunfuric thì có thể gây tai họa cho người thí nghiệm. Những minh họa kiểu như vậy có thể chứng tỏ rằng trong « số học » hóa học có khi các định luật kết hợp và phân phối của phép cộng bị loại trừ. Như vậy, có thể hình dung ra những loại hệ thống số học mà trong đó một hoặc một số các định luật 1),..., 5) mất hiệu lực. Những hệ thống số học như vậy đã được thực sự nghiên cứu trong toán học hiện đại. Cơ sở của các định luật 1)..., 5) là một mô hình cụ thể của khái niệm số nguyên trừu tượng. Đáng lẽ dùng các ký hiệu thông thường 1, 2, 3vv... thì ta biểu thị số các đối tượng trong một tập hợp cho trước (thí dụ số quả táo trên một cây) bằng một hệ thống điểm trong « ngăn kéo » sao cho mỗi điểm tương ứng với một đối tượng. Trong khi thao tác với những ngăn kéo đó, ta có thể nghiên cứu các định luật của số học các số nguyên. Muốn cộng hai số nguyên a và b ta đẩy hai ngăn kéo tương ứng sát vào nhau rồi bỏ vách ngăn đi. Muốn nhân a với b ta xếp các điểm trong hai ngăn kéo thành hàng rồi lập một ngăn kéo mới mà trong đó các điểm được sắp xếp thành a hàng ngang và b hàng dọc. Bây giờ, ta thấy rõ rằng các qui tắc 1),..., 5) biểu thị các tính chất trực giác hiển nhiên của các phép toán với các ngăn kéo mà ta đã đưa vào.

Dựa vào định nghĩa phép cộng hai số nguyên, đến đây có thể đưa ra định nghĩa *bất đẳng thức*. Mỗi khẳng định tương đương a < b (« a nhỏ hơn b ») và b > a (« b lớn hơn a ») biểu thị rằng có thể thu được ngăn kéo b từ ngăn kéo a bằng cách thêm vào một ngăn kéo thứ ba c thích hợp sao cho b = a + c. Nếu vậy, ta có thể viết: c = b — a và phép toán trừ cũng được định nghĩa.



H 2. Phép nhân



H.3. Định luật phân-phối

Phép cộng và phép trừ là các phép toán ngược nhau, chẳng hạn, nếu cộng số d vào số a rồi lấy kết quả tìm được trừ đi d thì lại được số a:

$$(a + d) - d = a$$

Cần lưu ý rằng số b — a chỉ được xác định với điều kiện b > a. Ý nghĩa của ký hiệu b — a như là số nguyên *âm* với điều kiện b < a sẽ được xét đến sau này (trang...) Ký hiệu b ≥ a (« b lớn hơn hoặc bằng a ») hoặc a ≤ b (« a nhỏ hơn hoặc bằng b »), (« a không vượt quá b ») thường được dùng với ý nghĩa là cái phủ định của a > b. Cho nên có thể viết 2 ≥ 2 và cũng có thể viết 3 ≥ 2.

Ta còn có thể mở rộng thêm một chút phạm vi các số nguyên dương mà ta đã biểu diễn bằng các ngăn kéo điểm. Ta đưa vào số nguyên « không » được biểu diễn

bởi ngăn kéo hoàn toàn rỗng: ta qui ước biểu thị ngăn kéo rỗng bằng ký hiệu 0 thông thường. Vậy thì theo định nghĩa phép cộng và phép nhân, với mọi số a ta có các hệ thức:

$$a + 0 = a \qquad\qquad a . 0 = 0$$

Thực vậy, $a + 0$ biểu thị sự thêm một ngăn kéo rỗng vào ngăn kéo a, còn $a.0$ biểu thị một ngăn kéo trong đó hoàn toàn không có hàng dọc nào, tức là ngăn kéo rỗng. Như vậy thì việc mở rộng định nghĩa phép trừ là hoàn toàn tự nhiên nếu giả thiết $a - a = 0$ với mọi a. Đó là những tính chất số học đặc trưng của số không.



H.4. Phép trừ

Các mô hình hình học như kiểu ngăn kéo điểm được áp dụng rộng rãi trong tính toán số học cho đến cuối thời kỳ Trung cổ và chỉ sau đó mới dần dần nhường chỗ cho các phương pháp ký hiệu hoàn hảo hơn nhiều dựa vào hệ thập phân.

2. Biểu diễn các số nguyên bằng các ký hiệu (phép viết số) Cần phân biệt rất thận trọng số nguyên với ký hiệu (thí dụ 5, V, vv...) được dùng để tái tạo nó bằng cách viết. Trong hệ thập phân của ta thì số không và chín số tự nhiên đầu tiên được ký hiệu bởi các chữ 0, 1, 2, 3, ..., 9. Số lớn hơn, chẳng hạn «ba trăm bảy mươi hai» được viết dưới dạng:

$$300 + 70 + 2 = 3.10^2 + 7.10 + 2$$

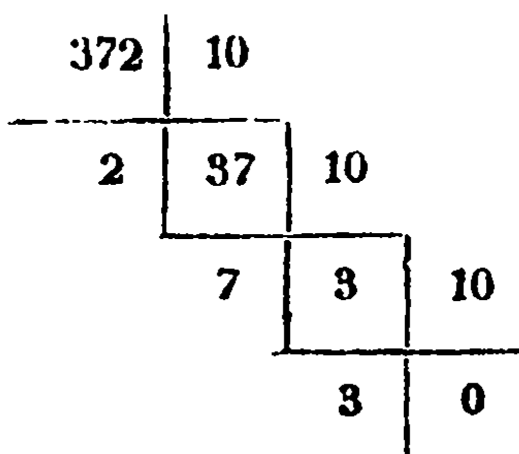
và trong hệ thập phân nó được viết bằng ký hiệu 372. Trong trường hợp này thì điều quan trọng là, giá trị

của mỗi chữ số 3, 7, 2 phụ thuộc vào vị trí của nó – phụ thuộc vào chỗ nó có đứng ở vị trí hàng đơn vị, hàng chục hoặc hàng trăm hay không. Dùng « giá trị theo vị trí » của các chữ số (nguyên tắc vị trí), ta có thể biểu diễn một số tự nhiên tùy ý mà chỉ cần đến mười chữ số trong các tổ hợp khác nhau của chúng. Quy tắc chung của phép biểu diễn như vậy được thể hiện bằng sơ đồ, được minh họa qua thí dụ:

$$Z = a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d$$

trong đó a, b, c, d là các số nguyên từ số không đến số chín. Lúc này số Z được biểu diễn vắn tắt bằng ký hiệu abcd.

Tiện thể, ta lưu ý thêm rằng các hệ số d, c, b, a chẳng qua là các số dư trong phép chia liên tiếp số Z cho 10. Chẳng hạn



Dựa vào cách viết số *Z* ở trên, ta chỉ biểu thị được những số nhỏ hơn mười nghìn. Muốn biểu thị các số lớn hơn mười nghìn cần năm chữ số hoặc nhiều hơn thế nữa. Nếu Z là số bao hàm giữa mười nghìn và một trăm nghìn thì ta có thể biểu diễn nó dưới dạng:

$$Z = a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e$$

và ký hiệu là abcde. Một khẳng định tương tự cũng đúng đối với những số bao hàm giữa một trăm nghìn và một triệu vv... Điều cực kỳ quan trọng ở đây là tìm phương pháp diễn đạt một cách tổng quát kết quả mà ta đã thu được bằng một công thức duy nhất.

Có thể đạt được mục đích này nếu ta biểu thị các hệ số khác nhau e, d, c,... bằng cùng một chữ a với các chỉ số khác nhau a_0, a_1, a_2,... Vì lũy thừa của 10 có thể lớn tùy ý cho nên ta không biểu diễn lũy thừa bậc cao của 10 là 10^3 hoặc 10^4 như trong các thí dụ trên mà viết là 10^n với n là số tự nhiên tùy ý. Bây giờ thì một số nguyên Z bất kỳ trong hệ thập phân sẽ được biểu thị dưới dạng:

$$Z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \qquad (1)$$

và được ký hiệu là $a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0$

Cũng như trong thí dụ đã xét ở trên, ta nhận thấy a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ là các số dư trong phép chia liên tiếp Z cho 10^n.

Trong hệ thập phân thì số « mười » đóng vai trò đặc biệt như là « cơ số » của hệ. Người nào chỉ tiếp xúc với những tính toán thực tế thì có thể không nhận thức được rõ việc tách ra số « mười » như vậy là quan trọng và một số nguyên tùy ý lớn hơn đơn vị cũng đều có thể đóng vai trò cơ số. Chẳng hạn, hoàn toàn có thể có hệ bảy với cơ số bảy. Trong hệ thống này một số nguyên được biểu thị dưới dạng

$$b_n\, 7^n + b_{n-1}\, 7^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 7 + b_0. \qquad (2)$$

trong đó các hệ số b biểu thị các số nguyên trong phạm vi từ số không đến sáu. Số đó được viết là:

$$b_n\, b_{n-1} \ldots b_1\, b_0$$

Chẳng hạn số « một trăm linh chín » trong hệ bảy được viết là 214, vì:

$$109 = 2.7^2 + 1.7 + 4.$$

Để luyện tập, bạn đọc có thể rút ra qui tắc chung để chuyển từ cơ số 10 sang cơ số B bất kỳ: cần chia liên tiếp số Z cho B, các số dư sẽ là « các chữ số » của số đó trong hệ cơ số B. Thí dụ:

```
109 | 7
----|----
 4  | 2  | 7
    |----|----
      1  | 15 | 7
         |----|----
            2   0
```

109 (hệ thập phân) = 214 (hệ bảy)

Tất nhiên nảy ra vấn đề: có thể chọn một số nào đó thật vừa ý làm cơ số của hệ đếm không? Sau này ta sẽ thấy rằng, một cơ số quá nhỏ sẽ dẫn đến một số điều không thuận lợi; mặt khác một cơ số quá lớn đòi hỏi ta phải thuộc nhiều chữ số và phải nhớ bảng nhân quá phức tạp. Có những ý kiến ủng hộ hệ cơ số mười hai với lý do mười hai chia hết cho 2, cho 3, cho 4 và cho 6, do đó mà các phép tính liên quan với phép chia và với phân số đơn giản hơn một chút. Nhưng muốn viết một số tùy ý trong hệ mười hai cần có thêm hai chữ số để biểu thị các số « mười » và « mười một ». Giả thử α biểu thị số « mười », β biểu thị số « mười một ». Như vậy, trong hệ mười hai thì « mười hai »

« được viết là 10, « hai mươi hai » là 1α « hai mươi ba » là 1β, còn « một trăm ba mươi mốt » là αβ.

Việc phát minh ra cách viết theo vị trí dựa vào giá trị tùy theo vị trí của các chữ số được người Babilon khởi xướng. Cách viết số như vậy được người Ấn Độ phát triển, nó có tác dụng vô cùng quí báu trong lịch sử văn minh nhân loại. Các hệ thống viết số cổ hơn được xây dựng trên nguyên tắc cộng (*). Chẳng hạn, trong cách viết số La mã thì CXVIII biểu thị « một trăm + một chục + năm + một + một + một ». Các hệ thống Ai cập, Do Thái và Hy Lạp cũng ở trình độ đó. Sự bất tiện của hệ thống cộng đơn thuần là ở chỗ số ký hiệu mới đưa vào là vô hạn. Nhưng nhược điểm chủ yếu của hệ thống cổ (loại La mã) là qui trình tính toán rất khó: chỉ những chuyên gia mới có thể giải được những bài toán đơn giản nhất. Đối với hệ « vị trí » Ấn Độ đang được phổ biến hiện nay thì tình thế hoàn toàn khác. Nó xuất hiện ở châu Âu thời Trung Cổ thông qua các thương nhân người Italia và cuối cùng thì người theo đạo Hồi làm chủ được nó. Hệ vị trí có một tính chất đặc biệt thuận lợi là mọi số từ nhỏ đến lớn đều được viết nhờ một số ít ký hiệu khác nhau : trong hệ thập phân thì đó là các chữ số Ả Rập « 0, 1, 2, ..., 9 ». Việc tính toán dễ dàng trong hệ này cũng có ý nghĩa không nhỏ. Các qui tắc tính toán với các số viết theo nguyên tắc vị trí có thể tóm tắt được dưới dạng bảng cộng và nhân và có thể nhớ mãi được. Phương pháp tính toán cổ

(*) Thực ra thì các yếu tố « vị trí » vẫn tồn tại trong phép viết số La Mã. Nói chung, thứ tự sắp đặt « các hàng » có vai trò của nó : chẳng hạn, VI = V + I, nhưng IV = V − I. LX = L + X nhưng XL = L − X...

mà trước kia chỉ một số ít người trong giới thượng lưu nắm được thì nay đã được đem dạy trong các trường cấp một. Trong lịch sử văn hóa ít có những thí dụ mà sự tiến bộ khoa học lại ảnh hưởng sâu sắc, nhẹ nhàng đến đời sống thực tiễn như thế.

3. Các phép tính toán số học trong các hệ đếm không thập phân. Vai trò của « một chục » đã bắt nguồn từ nền văn minh và chắc chắn có liên quan đến việc đếm theo ngón của hai bàn tay. Nhưng cách gọi tên các số lượng trong những ngôn ngữ khác nhau chứng tỏ rằng thời xưa có những hệ đếm khác nhau với cơ số 20 và 12. Trong tiếng Đức và tiếng Anh thì các từ biểu thị 11 và 12 không hình thành theo « nguyên tắc thập phân » kết hợp một chục với các đơn vị: chúng độc lập về ngôn ngữ với các từ biểu thị số 10. Trong tiếng Pháp, các từ biểu thị 20 và 80(*) cho phép ta giả thiết sự tồn tại của hệ cơ số 20 đã được dùng cho những nhu cầu nào đó. Trong tiếng Đan Mạch thì từ halvfirsindstyve biểu thị cho số 70 có nghĩa là « nửa đoạn đường từ ba lần hai mươi đến bốn lần hai mươi ». Các nhà thiên văn Babilon đã dùng hệ cơ số 60, nhờ sự kiện này mà ta giải thích được tại sao giờ và độ góc được chia thành 60 phút. Tất nhiên trong các hệ đếm không thập phân thì các qui tắc số học cũng giống như trong hệ thập phân nhưng bảng cộng và nhân các số có một chữ số thì lại khác. Do đã quen với hệ thập phân và đã gắn bó với các danh số trong ngôn ngữ của chúng ta, do đó lúc đầu ta sẽ vấp phải khó khăn đáng kể nếu ta định tính toán theo những hệ thống khác. Ta hãy thử tập làm tính nhân theo hệ bảy.

(*) Trong tiếng Pháp từ biểu thị 80 có nghĩa là bốn lần hai mươi (N D).

Trước khi bắt tay vào việc, cần viết hai bảng tính nhỏ mà ta sẽ dùng đến.

Cộng	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

Nhân	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Bây giờ ta nhân 265 với 24, những số này đều được viết trong hệ bảy (Trong hệ thập phân thì viết là: nhân 145 với 18). Đầu tiên, nhân 5 với 4 ta được 26 (xem bảng nhân). Ta viết ở hàng đơn vị nhớ 2 sang hàng sau. Tiếp tục, ta được 4 . 6 = 33 và 33 + 2 = 35. Viết số 5 vào hàng chục rồi cứ thế cho đến hết. Cộng các số 1456 và 5630 ta được 6 = 0 = 6 ở hàng đơn vị, sau đó ở hàng « chục » ta được 5 + 3 = 11. Ta viết 1 và nhớ 1 sang hàng « trăm », ở hàng này ta có 1 + 6 + 4 = 14. Kết quả cuối cùng là 265 . 24 = 10416.

$$\begin{array}{r} 265 \\ \times\ 24 \\ \hline 1456 \\ 5630 \\ \hline 10416 \end{array}$$

Để thử lại ta làm phép tính đó trong hệ thập phân. Muốn viết số 10416 theo hệ thập phân ta tìm lũy thừa của 7 cho đến bậc bốn : $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$. Từ đó suy ra 10416 = 2401 + 4 49 + 7 + 6, trong đó vế phải của đẳng thức này đã được viết theo hệ thập phân. Cộng các số ở vế phải, ta thấy số 10416 trong hệ bảy bằng số 2610 trong hệ thập phân. Bây giờ ta nhân 145 với 18 trong hệ thập phân: kết quả cũng bằng 2610. Về quan điểm lý thuyết thì một hệ thống cơ số 2 xây dựng theo nguyên tắc vị trí

nổi bật ở khía cạnh đó là hệ có cơ số nhỏ nhất trong các cơ số có thể có được. Trong hệ nhị phân này chỉ có hai chữ số 0 và 1; mọi số khác đều được viết bằng các tổ hợp của những ký hiệu đó. Các bảng cộng và nhân được qui về hai qui tắc: $1 + 1 = 10$ và $1 . 1 = 1$. Nhưng tính không thực tiễn của hệ thống này khá hiển nhiên (*): muốn biểu thị các số không lớn lắm đã phải dùng đến những biểu thức khá dài. Chẳng hạn, số bảy mươi chín được biểu thị dưới dạng $1 . 2^6 + 0 . 2^5 + 0 . 2^4 + 1 . 2^3 + 1 . 2^2 1 . 2 + 1$ và được viết trong hệ nhị phân là 1001111.

Để minh họa sự đơn giản của phép nhân trong hệ nhị phân, ta nhân số bảy với năm viết dưới dạng 111 và 101. Để ý rằng trong hệ này thì $1 + 1 = 10$, ta viết:

$$\begin{array}{r} 111 \\ 101 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 100011 \end{array} = 2^5 + 2 + 1$$

Kết quả ta được ba mươi lăm như đã biết. Gôtphrit Vinhem Leibnitx (1646 — 1716), một trong những người thông thái nhất thời bấy giờ đã đánh giá rất cao hệ nhị phân. Laplaxơ đã nói về điều này như sau: « Leibnitx đã thấy mẫu mực của sự sáng tạo trong số học nhị phân của mình, ông cho rằng đơn vị là khởi điểm thần bí, còn số không là sự không tồn tại, thượng đế tạo ra muôn loài từ sự không tồn tại y như đơn vị và số không biểu thị cho mọi con số trong hệ của ông ».

(*) Từ thời gian viết cuốn sách.

§2. SỰ VÔ HẠN CỦA HỆ THỐNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN. PHÉP QUI NẠP TOÁN HỌC

1. Nguyên lý qui nạp toán học. Dãy số tự nhiên 1, 2, 3, 4... không có số tận cùng: thực vậy, nếu có một số tự nhiên n nào đó, thì ngay sau nó đã có thể viết số tự nhiên n + 1. Để gọi tên tính chất như vậy của dãy số tự nhiên, ta nói rằng nó là một *tập hợp vô hạn*. Dãy số tự nhiên là một thí dụ đơn giản nhất và tự nhiên nhất của sự vô hạn (với ý nghĩa toán học) đóng vai trò chủ đạo trong toán học hiện đại. Trong cuốn sách này có nhiều chỗ đề cập đến tập hợp vô hạn các sự vật, chẳng hạn như tập hợp điểm trên đường thẳng hoặc tập hợp tam giác trong mặt phẳng. Nhưng, dãy vô hạn số tự nhiên chắc chắn là một thí dụ đơn giản nhất của tập hợp vô hạn.

Việc chuyển từng bước liên tiếp từ n đến n + 1 để sinh ra dãy số tự nhiên vô hạn là cơ sở của một trong những lập luận quan trọng nhất và điển hình nhất của toán học — nguyên lý qui nạp toán học. « Quy nạp thực nghiệm » thường được sử dụng trong các ngành khoa học tự nhiên, căn cứ vào một loạt các quan sát riêng rẽ về một hiện tượng nào đó mà đi đến sự thừa nhận một qui luật chung mà hiện tượng ấy phải tuân theo dưới mọi hình thức khác nhau của nó. Mức độ tin cậy của một qui luật được xác lập theo cách như vậy phụ thuộc vào số các quan sát riêng biệt và phụ thuộc vào những kết luận rút ra từ đó. Thông thường thì những lập luận qui nạp loại tương tự là hoàn toàn đáng tin cậy; khẳng định rằng ngày mai Mặt Trời mọc từ hướng đông là hiển nhiên đến nổi điều đó nói chung sẽ xảy ra, nhưng trong trường hợp này thì tính chất của sự

xác nhận hoàn toàn khác với trường hợp một định lý được chứng minh bằng những lập luận logic chặt chẽ tức là bằng những lập luận toán học.

Phép qui nạp toán học được áp dụng với một phương pháp khác biệt có mục đích xác lập tính chân lý của các định lý toán học tại một dãy vô hạn các trường hợp (trường hợp thứ nhất, thứ hai, thứ ba v.v..., không có ngoại lệ). Ta biểu thị A là một khẳng định nào đó đối với một số tự nhiên n bất kỳ. Giả sử A là khẳng định: « Tổng các góc trong của một đa giác lồi $n+2$ cạnh bằng $180^\circ . n$ ». Hoặc biểu thị A' là khẳng định « n đường thẳng trên mặt phẳng không thể chia mặt phẳng đó ra nhiều hơn 2^n phần ». Muốn chứng minh một định lý như vậy đối với một giá trị tùy ý của n thì chứng minh nó đối với 10, 100 hoặc thậm chí 1000 giá trị đầu tiên của n cũng là chưa đủ. Đó chính là nguyên tắc của qui nạp thực nghiệm. Thay thế vào đó ta sẽ dùng một lập luận toán học chặt chẽ hoàn toàn không có tính chất thực nghiệm, ta sẽ làm sáng tỏ những đặc điểm của nó thông qua các thí dụ về chứng minh các mệnh đề A và A'. Ta xét mệnh đề A. Nếu $n = 1$ thì mệnh đề đó nói về hình tam giác, trong hình học sơ cấp ta đã biết rằng, tổng các góc trong của tam giác bằng $180^\circ . 1$. Trong trường hợp hình tứ giác ($n = 2$), ta vẽ đường chéo phân chia tứ giác thành hai tam giác, bây giờ thì đã rõ ràng tổng các góc của tứ giác bằng tổng các góc của hai tam giác, tức là bằng $180^\circ + 100^\circ = 180^\circ . 2$. Cũng bằng cách như trên ta phân chia ngũ giác thành một tứ giác và một tam giác. Vì tứ giác có tổng các góc là $180^\circ.2$ và tam giác có tổng các góc là $180^\circ . 1$, cho nên tổng các góc của ngũ giác là $180^\circ. 3$. Bây giờ thì rõ ràng lập luận có thể tiếp tục mãi theo cách hoàn toàn tương tự. Ta chứng minh định

lý cho trường hợp $n = 4$, sau đó cho trường hợp $n = 5$ v.v... Mỗi kết luận tiếp sau được suy ra từ kết luận trước nó và định lý A được thừa nhận đối với giá trị n bất kỳ.

Tình hình cũng xảy ra như vậy đối với mệnh đề A. Khi $n = 1$ thì dĩ nhiên là nó đúng vì mọi đường thẳng đều chia mặt phẳng ra làm 2 phần. Ta vẽ một đường thẳng thứ hai. Nó chia mỗi phần trước làm hai phần với điều kiện đường thẳng thứ hai không song song với đường thẳng thứ nhất. Nhưng, dù thế nào chăng nữa thì trong trường hợp $n = 2$ có không nhiều hơn $4 = 2^2$ phần. Ta lại vẽ thêm đường thẳng thứ ba. Mỗi phần đã có hoặc bị chia làm hai phần, hoặc không bị chia. Do đó số phần mới không vượt quá $2^2 . 2 = 2^3$. Thừa nhận điều này, ta sẽ giải quyết được trường hợp tiếp theo v.v..., quá trình này không bao giờ kết thúc.

Bản chất của lập luận trên là ở chỗ, khi muốn chứng minh sự đúng đắn của một định lý A tổng quát nào đó đối với mọi giá trị của n, ta chứng minh định lý đó cho một dãy vô hạn liên tiếp các trường hợp riêng A_1, A_2... Tính khả hiện của lập luận đó dựa trên hai tiền đề:

a) Có một phương pháp chung để chứng minh rằng *nếu* A_r đúng thì khẳng định tiếp theo $A_r + 1$ *cũng* đúng.

b) Đã biết khẳng định thứ nhất A_1 là đúng cơ sở để cho hai điều kiện đó là đủ đảm bảo cho mọi khẳng định A_1, A_2, A_3,... cũng đúng là một nguyên lý lôgic mà nó mang một ý nghĩa nền tảng trong toán học giống như những qui tắc cổ điển của lôgic Arixtôt.

Ta phát biểu nguyên lý đó như sau. Giả thử phải xác lập sự đúng đắn của một dãy vô hạn các mệnh đề toán học $A_1, A_2, A_3 ...$ mà toàn thể hợp thành một mệnh đề tổng quát A. Giả thiết rằng:

a) *Thực hiện được một lập luận toán học chứng tỏ rằng nếu A_r đúng thì A_{r+1} cũng đúng với mọi số tự nhiên r và*

b) *Xác nhận được rằng A_1 đúng. Lúc này thì mọi mệnh đề của dãy là đúng và do đó, mệnh đề A được chứng minh.* Ta chấp nhận nguyên lý qui nạp mà không hoài nghi gì (cũng như ta đã chấp nhận mọi qui tắc của logic thông thường) và xem nó là nguyên lý cơ sở của chứng minh toán học. Thực ra, ta có thể xác lập sự đúng đắn của mỗi khẳng định A_n bằng cách xuất phát từ giả thiết b) cho rằng A_1 là đúng và áp dụng nhiều lần giả thiết a) chứng minh liên tiếp sự đúng đắn của các khẳng định $A_2, A_3, A_4 ....$ cho đến A_n. Nguyên lý qui nạp toán học được suy ra từ một sự kiện là ngay sau mỗi số tự nhiên r có một số tự nhiên khác $r + 1$ và bắt đầu từ số tự nhiên 1 có thể đạt tới số tự nhiên n sau một số hữu hạn bước như vậy.

Thường thường ta áp dụng nguyên lý qui nạp toán học mà không nêu rõ sự lặp lại đó hoặc nguyên lý này được ẩn sau công thức « và cứ như thế mãi ». Dạng ẩn này của việc áp dụng nguyên lý qui nạp là đặc điểm của giảng dạy toán học sơ cấp. Nhưng khi chứng minh các định lý khác sâu sắc hơn, tế nhị hơn không thể không vận dụng nguyên lý đó một cách tường minh. Ta nêu ra ở đây một số thí dụ đơn giản nhưng dẫu sao cũng không phải là hoàn toàn tầm thường.

2. Cấp số cộng Tổng $1 + 2 + 3 + ... n$ của n số tự nhiên đầu tiên bằng $\frac{n(n+1)}{2}$ với mọi n.

Muốn chứng minh định lý này bằng qui nạp toán học ta phải xác lập sự đúng đắn của các hệ thức A_n với mọi n:

$$1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

a) Nếu r là một số tự nhiên nào đó và nếu khẳng định A_r là đúng, tức là nếu

$$1 + 2 + 3 + \dots + r = \frac{r(r+2)}{2}$$

thì thêm vào hai vế của đẳng thức sau này r + 1 ta được

$$1 + 2 + 3 \dots + r + (r + 1) = \frac{r(r+1)}{2} + (r + 1) =$$

$$= \frac{r(r+1) + 2(r+1)}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

đó chính là khẳng định A_{r+1}

b) Khẳng định A_1 hiển nhiên là đúng vì $1 = \frac{1.2}{2}$.

Như vậy, theo nguyên lý qui nạp toán học thì khẳng định A_n là đúng với mọi n, đó là điều phải chứng minh. Người ta còn thường chứng minh định lý này bằng cách khác. Ta viết tổng 1 + 2 + 3 + ... + r dưới hai dạng:

$$S_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$$
$$S_n = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$$

Ta thấy các số nằm trên một hàng dọc cộng lại bằng n + 1. Vì có tất cả n hàng dọc, ta suy ra:

$$2S_n = n(n + 1)$$

và bây giờ chỉ còn phải chia cho 2 là xong.

Từ công thức (1) ta suy ra ngay công thức tổng quát của tổng (n + 1) số hạng đầu tiên của cấp số cộng :

$$P_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + nd) = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

Thực vậy,

$$P_n = (n + 1) a + (1 + 2 + \dots + n) d = (n + 1) a + \frac{n(n+1)d}{2} = \frac{2(n+1)a + n(n+1)d}{2} = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

Trong trường hợp $a = 0$, $d = 1$, hệ thức sau cùng này trở thành hệ thức (1).

3. Cấp số cộng. Cũng có thể nghiên cứu cấp số nhân (dưới dạng tổng quát) bằng cách như trên. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi n thì :

$$G_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (3)$$

(ta giả thiết $q \neq 1$ vì nếu không, vế phải của (3) không có nghĩa).

Tất nhiên khẳng định của ta đúng với $n - 1$, vì trong trường hợp này thì :

$$G_1 = a + aq = \frac{a(1-q^2)}{1-q}$$

và nếu ta giả định rằng

$$G_r = a + aq + \dots + aq^r = a\,\frac{1-q^{r+1}}{1-q}$$

thì suy ra ngay:

$$G_{r+1} = (a + aq + \dots + aq^r) + aq\ r - 1 =$$

$$a\,\frac{(1-q^{r+1})+q^{r+2}(1-q)}{1-q}=a\,\frac{1-q^{r+1}+q^{r+1}-q^{r+2}}{1-q}$$

$$=a\,\frac{1-q^{r+2}}{1-q}$$

Nhưng đó chính là khẳng định (3) khi $n=r+1$. Chứng minh kết thúc.

Trong các sách giáo khoa sơ cấp có nêu một chứng minh khác. Ta đặt:

$$G_n=a+aq+\dots+aq^n.$$

Nhân hai vế với q, ta được:

$$qG_n=aq+aq^2+\dots+aq^{n+1}$$

Trừ đẳng thức này cho đẳng thức trên ta được:

$$G_n-qG_n=a-aq^{n+1}\ ;\ (1-q)\,G_n=a\,(1-q^{n+1}).$$

$$G_n=a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

4. Tổng của n bình phương đầu tiên. Đối với tổng của n bình phương đầu tiên có một ứng dụng thú vị sau đây của nguyên lý qui nạp toán học. Sau khi thử (ít nhất với một số giá trị không lớn của n), ta thấy rằng:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad(4)$$

sau đó ta dự đoán là công thức đặc biệt đó đúng *với mọi số nguyên dương n*. Muốn chứng minh điều này, một lần nữa ta áp dụng phương pháp qui nạp toán học. Trước hết ta chú ý rằng nếu khẳng định A_n bao hàm trong hệ thức (4) là đúng khi $n=r$ tức là:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+r^2=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6},$$

thì, sau khi thêm vào hai vế $(r+1)^2$, ta được:

$$1^2+2^2+\dots+r^2+(r+1)^2=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}+(r+1)^2=$$

$$= \frac{r(r+1)(2r+1)+6(r+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(r+1)[r(2r+1)+6(r+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(r+1)(2r^2+7r+6)}{6} = \frac{(r+1)(r+2)(2r+3)}{6},$$

đó là khẳng định A_{r+1}, vì nó suy ra từ hệ thức (4) bằng cách thay n bằng r + 1. Để kết thúc chứng minh, chỉ cần lưu ý rằng khẳng định A_1, tức công thức :

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

là đúng. Như vậy, hệ thức (4) đúng với mọi n. Có thể viết những công thức tương tự đối với tổng của các lũy thừa 3 và lũy thừa 4, tổng quát hơn đối với tổng dạng $1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$ trong đó k là số nguyên dương tùy ý. Bạn đọc có thể chứng minh bằng qui nạp toán học công thức :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (5)$$

Để kết luận cần lưu ý rằng, mặc dù nguyên lý quy nạp là hoàn toàn đủ để *chứng minh* công thức (5) nhưng chứng minh đó không nêu ra được những chỉ dẫn quan trọng nào để đi đến bản thân công thức đó : tại sao dự đoán tổng của n lập phương đầu tiên bằng $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ mà không phải là một biểu thức nào khác chẳng hạn $\left[\frac{n(n+1)}{3}\right]^2$ hoặc $\frac{19n^2 - 41n + 24}{3}$ v.v... Sự lựa chọn là quá lớn! Vấn đề áp dụng những qui tắc logic đơn giản nào đó để chứng minh một định lý không mảy may ảnh hưởng đến nguồn gốc sáng tạo trong toán học mà vai trò của nó là sự lựa chọn trong một tập hợp vô

hạn các khả năng này sinh ra. Vấn đề giả thiết (5) được đặt ra như thế nào thuộc vào một phạm vi không có những qui tắc chung nào cả; ở đây người ta tiến hành phép thử nghiệm, phép tương tự và phép qui nạp kiến thiết. Nếu như một giả thiết đúng đã được hình thành thì nguyên lý qui nạp toán học thường là đủ để chứng minh định lý. Nhưng, vì bản thân chứng minh ấy không có ảnh hưởng gì đến con đường phát hiện thì tốt hơn nên gọi nó là một sự *kiểm tra lại.*

5. Một bất đẳng thức quan trọng. Trong chương sau ta sẽ cần đến bất đẳng thức:

$$(1 + p)^n \geqslant 1 + np, \tag{6}$$

Với mọi p thỏa mãn điều kiện $p > -1$ và với mọi giá trị n nguyên dương (ở đây ta dự đoán p là số bất kỳ lớn hơn -1 tức là với cả những p âm và p không nguyên. Chứng minh là như nhau, không phụ thuộc vào số p). Ta lại dùng qui nạp toán học.

a) Nếu $(1 + p)^r \geqslant 1 + rp$ thì khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số dương $1 + p$, ta được:

$$(1 + p)^{r+1} \geqslant 1 + rp + p + rp^2$$

Bỏ đi số hạng dương rp^2 ta sẽ tăng thêm hiệu lực của bất đẳng thức; vậy thì;

$$(1 + p)^{r+1} \geqslant 1 + (r + 1)p.$$

Kết quả thu được chứng tỏ rằng bất đẳng thức (6) đúng cả khi $n = r + 1$. b) Hoàn toàn rõ ràng rằng $(1 + p)^1 \geqslant 1 + p$. Bởi thế, chứng minh đã xong.

Sự giới hạn bao hàm trong điều kiện $p > -1$ là quan trọng. Nếu $p < -1$ thì $(1 + p)$ âm, lập luận a) không đúng vì khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với số âm thì chiều của nó thay đổi (chẳng hạn, nhân hai vế của bất đẳng thức $3 > 2$ với -1 thì ta có $-3 < -2$).

6. Định lý nhị thức. Thường phải mở ngoặc một lũy thừa bậc n của nhị thức dạng $(a + b)^n$. Phép tính trực tiếp cho:

khi n = 1 $(a + b)^1 = a + b$,

khi n = 2 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$

khi n = 3 $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

và cứ như thế mãi.

Nhưng dưới các từ « cứ như thế mãi » có ẩn một qui luật chung nào không? Ta phân tích quá trình tính toán $(a + b)^2$. Vì $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ cho nên ta thu được biểu thức cho $(a + b)^2$ bằng cách nhân mỗi số hạng của biểu thức $(a + b)$ với a, sau đó với b rồi cộng các kết quả lại. Cũng áp dụng thể thức như vậy khi tính $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$, cũng như $(a b +)^4$, $(a + b)^5$, v.v... Ta tính được $(a + b)^n$ bằng cách nhân $(a + b)^{n-1}$ với a, sau đó nhân với b rồi cộng các kết quả lại. Ta có sơ đồ sau đây;

$a + b =$

$(a + b)^2 =$

$(a + b)^3 =$



giúp ta phát hiện qui luật chung về cấu tạo các hệ số trong phân tích $(a + b)^n$. Ta sẽ xây dựng một sơ đồ hình tam giác gồm các số tự nhiên bắt đầu từ các hệ số 1, 1 của nhị thức a + b sao cho mỗi số trong tam

giác là tổng hai số đứng trên chúng trong bảng trước (bên trái và bên phải). Sơ đồ này đã nổi tiếng với tên gọi là *tam giác Paxcan.*

						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

. . . .

Các hệ số trong phân tích $(a+b)^n$ theo lũy thừa giảm của a và lũy thừa tăng của b nằm ở dòng thứ n của sơ đồ này.

Chẳng hạn như,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + \\ + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Nhờ những ký hiệu có dùng chỉ số dưới và chỉ số trên rất ngắn gọn, ta viết những số ở dòng thứ n của tam giác Paxcan như sau :

$C_0^n = 1, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_{n-1}^n, C_n^n = 1.$

Như vậy công thức tổng quát của phân tích $(a+b)^n$ có dạng như sau:

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n. \quad (7)$$

Theo qui luật làm cơ sở cho cấu trúc của tam giác Paxcan, ta có hệ thức:

$$C_i^n = C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1} \quad (8)$$

Bạn đọc đã có kinh nghiệm áp dụng phương pháp qui nạp toán học, có thể dùng nguyên lý đó (và các đẳng thức $C_0^1 = C_1^1 = 1$) để chứng minh công thức tổng quát

$$C_n^i = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad (9)$$

[với mọi n dương thì ký hiệu n!) đọc là « n — giai thừa) biểu thị tích của n số tự nhiên đầu tiên : $n! = 1.2\dots n$. Để thuận tiện, ta định nghĩa $0! = 1$ để cho công thức (9) có hiệu lực đối với $i = 0$ hoặc $i = n$]

Việc suy ra công thức cho các hệ số của phân tích nhị thức còn có tên gọi là *định lý về nhị thức* (xem trang 41)

Một lần nữa ta nhấn mạnh rằng nguyên lý qui nạp toán học khác hẳn với qui nạp thực nghiệm dùng trong khoa học tự nhiên. Sự thừa nhận một qui luật chung cho một số hữu hạn các trường hợp (dù rằng rất lớn) tuyệt nhiên không phải là một sự chứng minh theo ý nghĩa toán học ngay cả khi biết rằng không có một trường hợp ngoại lệ nào. Trong hoàn cảnh đó thì « khẳng định » hoặc « qui luật » được xem xét không khác gì một « giả thuyết » của lý trí, nó có thể thay đổi đi do kết quả của những thí nghiệm về sau này. Trong toán học, « một qui luật » được coi là đã chứng minh khi và chỉ khi nó được xem là hệ quả logic tất yếu của những tiền đề đã được thừa nhận là đúng. Có không ít thí dụ về những khẳng định toán học đã được kiểm nghiệm và tỏ ra là đúng đối với tất cả những trường hợp riêng từ trước tới nay, nhưng đến bây giờ vẫn chưa được chứng minh một cách tổng quát (xem thí dụ trang 56). Nếu một định lý đã được khẳng định đúng đắn với một số lớn thí dụ thì vẫn có thể nghi ngờ sự đúng đắn của nó trong trường hợp tổng quát, đó là cơ sở của ý định chứng minh nó bằng qui nạp toán học. Nếu ý định đó thành công thì vấn đề đúng hay sai của định lý, được xác nhận, nếu ngược lại vấn đề đúng hay sai của định lý vẫn chưa được giải quyết,

định lý có thể được chứng minh hoặc bị bác bỏ bởi một tron. những phương pháp khác trong tương lai.

Khi vận dụng nguyên lý qui nạp toán học nên thường xuyên theo dõi một cách thận trọng xem các giả thiết a) và b) có thực sự được thực hiện hay không. Nếu không, có thể dẫn tới điều vô lý. Chúng tôi đề nghị bạn đọc phát hiện chỗ sai trong nghịch lý sau đây. Ta sẽ « chứng minh » rằng *hai số nguyên dương bất kỳ đều bằng nhau*: $5 = 10$ chẳng hạn. Ta bắt đầu từ một định nghĩa. Nếu a và b là hai số nguyên dương không bằng nhau thì ta sẽ biểu thị a hoặc b là max(a, b) tùy theo số nào lớn hơn; nếu $a = b$ thì ta đặt max $(a, b) = a = b$. Chẳng hạn, max $(3, 5) =$ max $(5,3)$, max $(4, 4) = 4$. Ta ký hiệu A_n là khẳng định sau đây: « Nếu a và b là hai số nguyên dương sao cho max $(a, b) = n$ thì $a = b$ ».

a) Giả thiết rằng A_r đúng. Giả sử a và b là hai số nguyên dương sao cho max $(a, b) = r + 1$.

Xét các số:

$$\alpha = a - 1$$
$$\beta = b - 1$$

thì max $(\alpha, \beta) = r$. Trong trường hợp này thì $\alpha = \beta$ vì A_r đúng. Nhưng từ đó suy ra $a = b$, tức là A_{r+1} đúng.

b) A_1 dĩ nhiên đúng vì nếu max $(a, b) = 1$ thì mỗi số a và b (theo giả thiết về các số nguyên dương) phải bằng 1.

Như vậy, A_n đúng với mọi n theo nguyên lý qui nạp toán học.

Bây giờ, giả sử a và b là hai số nguyên dương bất kỳ, ta đặt max $(a, b) = r$. Đã chứng minh được A_n đúng với mọi n, thì riêng A_r cũng đúng. Do đó $a = b$.

LÝ THUYẾT SỐ

MỞ ĐẦU

Những quan niệm mê tín và thần bí đầu tiên về các số nguyên dần dần bị phai mờ đi, nhưng đối với các nhà toán học thì sự quan tâm đến các con số không bao giờ giảm bớt. Như ta đã biết Ơclid, (khoảng 300 năm trước công nguyên), người mà vinh quang lớn được xác nhận qua một phần tập « khởi đầu » của ông dành cho cơ sở của hình học (trong nhà trường), đã có những phát minh thực sự trong phạm vi lý thuyết số, trong khi hình học của ông, về cơ bản chỉ là sự tập hợp những kết quả thu được từ trước đó. *Alêxăng Điôphăng* (khoảng 275 năm trước công nguyên), một trong những nhà đại số học đầu tiên cũng để lại những công trình về lý thuyết số. Pie Fecma (1601 — 1665) sống ở Tuludơ, làm nghề luật sư đồng thời là nhà toán học nổi tiếng nhất thời đó, đã đặt nền móng cho những phát minh về lý thuyết số hiện đại. Ơle (1707 — 1783), nhà toán học có nhiều phát minh tuyệt vời nhất, thường đi sâu vào lý thuyết số trong các công trình của mình. Cũng nên kể thêm những tên tuổi khác nổi tiếng trong giải tích toán học: *Lagrăng*, *Điriclê*, *Riman*, *Gauss* (1777 — 1855) là những nhà toán học nổi tiếng nhất thời cận đại đã chú ý đến nhiều ngành toán học khác nhau, đã xác định quan hệ của mình với lý thuyết số qua câu nói sau đây: « Toán học là bà hoàng của khoa học, lý thuyết là bà hoàng của toán học ».

§ 1. SỐ NGUYÊN TỐ

1. Những sự kiện cơ bản. Nhiều khẳng định trong phạm vi lý thuyết số cũng như trong toán học nói

chung không thuộc về các sự vật riêng biệt như thuộc về số 5 hoặc số 32 chẳng hạn, mà thuộc về một lớp các sự vật có một tính chất chung nào đó: thí dụ: lớp tất cả các số chẵn 2, 4, 6, 8..., hoặc lớp các số chia hết cho ba : 3, 6, 9, 12..., hoặc lớp các bình phương của các số nguyên 1, 4, 9, 16 ..., v.v...

Lớp các *số nguyên tố* có vai trò đặc biệt quan trọng trong lý thuyết số. Rất nhiều số có thể phân tích thành các thừa số nhỏ hơn : $10 = 2.5$, $111 = 3.37$, $144 = 3.3.2.2.2.2$. v.v... Những số không thể phân tích được như thế gọi là các số nguyên tố. Chính xác hơn thì, số nguyên tố là số nguyên p lớn hơn đơn vị và không có thừa số nào khác ngoài đơn vị và chính nó. (Số a là *thừa số* hoặc *ước số* của số b hoặc chia hết cho số b nếu có một số nguyên c sao cho $b = ac$). Các số 2, 3, 5, 7, 11,13, 17. là số nguyên tố, số 12 không phải là số nguyên tố vì $12 = 3.4$. Ý nghĩa của lớp các nguyên tố là ở chỗ *mỗi* số đều có thể viết dưới dạng *tích của các số nguyên tố*: nếu một số cho trước không nguyên tố thì ta có thể liên tiếp phân tích nó thành thừa số cho đến khi tất cả các thừa số đều là nguyên tố, chẳng hạn, $360 = 3.120 = 3.20.4 = 3.3.10.2.2 = 2^3.3^2.5$. Số không nguyên tố khác 0 và 1 được gọi là *hợp số*. Một trong những câu hỏi đầu tiên nảy ra khi ta nghiên cứu lớp các số nguyên tố là: chỉ có một số hữu hạn hay là có vô hạn các số nguyên tố khác nhau tương tự như lớp các số nguyên mà nó là một bộ phận. Câu trả lời là như sau: *có một tập hợp vô hạn các số nguyên tố*. Chứng minh sự tồn tại một tập hợp vô hạn số nguyên tố do Ơclid nêu ra là điển hình của lập luận toán học. Cơ sở của nó là « phương pháp gián tiếp » (chứng minh phản chứng,

dẫn đến sự vô lý). Ta giả thiết rằng mệnh đề đang xét là sai. Điều đó có nghĩa là chỉ tồn tại một số hữu hạn các số nguyên tố, mặc dầu có thể có rất nhiều — khoảng một tỷ chẳng hạn; bây giờ ta giả thử đó là số được biểu thị dưới dạng « tổng quát » hoặc « không xác định » là n. Ta có thể biểu thị tất cả các số nguyên tố đó bằng $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Mọi số khác là hợp số và chia hết cho ít nhất một trong các nguyên tố $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Bây giờ ta sẽ xây dựng một số A khác với các số $p_1, p_2, \ldots, p_n$, lớn hơn mọi số này và không chia hết cho bất cứ số nào trong các số đó. Đó là:

$$A = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$$

Nó bằng tích của tất các các số trong tập hợp số nguyên tố cộng thêm đơn vị. số A lớn hơn mọi số p cho nên phải là hợp số. Nhưng khi chia cho p_1, cho p_2 v.v..., A đều cho số dư là 1, bởi thế A không chia hết cho số p nào cả. Do đó giả thiết tồn tại một số hữu hạn số nguyên tố mà ta nêu ra dẫn đến mâu thuẫn, như vậy giả thiết đó là sai. Suy ra cái đối lập với nó là đúng. Định lý được chứng minh.

Dù rằng chứng minh này có tính chất « gián tiếp » nhưng một biến dạng không lớn của nó ít nhất cũng dẫn đến, về mặt lý thuyết một phương pháp xây dựng một dãy vô hạn các số nguyên tố. Giả sử rằng bắt đầu từ một số nguyên tố nào đó, chẳng hạn $p_1 = 2$, ta đã tìm được n số nguyên tố $p_1, p_2, \ldots p_n$; hơn nữa, ta lưu ý rằng số $p_1, p_2 \ldots p_n + 1$ hoặc nguyên tố, hoặc chứa một thừa số nguyên tố khác với những số đã tìm được. Vì một thừa số như thế bao giờ cũng có thể tìm được (có thể bằng các phép thử trực tiếp), cho nên trong cả hai trường hợp trên, rút cục ta được một số nguyên tố

mới p_{n+1}, cứ tiếp tục quá trình đó, ta thấy rằng dãy số nguyên tố, mà ta có thể xây dựng được thực sự, không có số tận cùng.

Nếu một số nào đó được biểu thị dưới dạng tích các thừa số nguyên tố thì những thừa số đó tất nhiên có thể sắp xếp theo một thứ tự thích hợp nào đó. Khi phân tích các số thành thừa số nguyên tố, ta nhanh chóng đi tới một kết luận rằng sự phân tích một số N bất kỳ thành thừa số nguyên tố là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các thừa số: *mỗi số tự nhiên N lớn hơn đơn vị chỉ có thể phân tích thành thừa số nguyên tố một cách duy nhất.* Điều khẳng định này thoạt nhìn có vẻ hiển nhiên đến nỗi người không chuyên môn về toán học đã có ý định bác bỏ sự cần thiết phải chứng minh nó. Mệnh đề đang xét hoàn toàn không phải là tầm thường; mặt khác, dầu rằng chứng minh của nó hoàn toàn sơ cấp nhưng sẽ đòi hỏi những lập luận khá tế nhị. Chứng minh cổ điển của «định lý cơ bản về số học» này do Ơclid nêu ra dựa trên phương pháp (algôrit) tìm ước số chung lớn nhất của hai số. Ta sẽ xét đến phương pháp này ở trang 85. Ở đây ta sẽ dẫn ra một chứng minh mới ngắn hơn chứng minh của Ơclid một chút và có tính chất suy diễn hơn. Nó cũng là một điển hình của lập luận «gián tiếp». Ta sẽ giả thiết rằng có một số nào đó có thể phân tích thành thừa số nguyên tố bằng hai phương pháp khác hẳn nhau, giả thiết này sẽ dẫn ta đến mâu thuẫn. Sự nảy sinh mâu thuẫn chứng tỏ rằng giả thiết về sự tồn tại một số có hai phân tích thừa số nguyên tố khác hẳn nhau là không có căn cứ; từ đó ta kết luận rằng việc phân tích các số thành thừa số nguyên tố có tính chất duy nhất.

Nếu có những số có hai phân tích thừa số nguyên tố khác hẳn nhau thì tất có số *nhỏ nhất* có tính chất ấy (xem trang 44):

$$m = p_1p_2 \dots p_r = q_1q_2 \dots q_s. \quad (1)$$

trong đó p và q biểu thị các số nguyên tố. Nếu cần, bằng cách thay đổi thứ tự các thừa số, ta có thể giả thiết rằng:

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_r, \ q_1 \leqslant q_2 \leqslant \dots \leqslant q_s$$

Lưu ý rằng p_1 khác q_1 vì nếu không thì khi chia đẳng thức (1) cho thừa số nguyên tố chung, ta sẽ được một số nhỏ hơn m có hai phân tích thừa số khác hẳn nhau, điều này mâu thuẫn với giả thiết m là số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Do đó, hoặc $p_1 < q_1$ hoặc $q_1 < p_1$ Giả sử $p_1 < q_1$ (nếu $p_1 > q_1$) thì trong lập luận chỉ cần thay vị trí của các chữ số p và q cho nhau. Ta xét số nguyên:

$$m' = m - (p_1q_2q_3 \dots q_s) \quad (2)$$

Thay thế m bởi hai biểu thức của nó trong đẳng thức (1), ta có thể viết số m' dưới hai dạng:

$$\begin{aligned} m' &= (p_1 p_2 \dots p_r) - (p_1q_2q_3 \dots q_s) \\ &= p_1 (p_2 \dots p_r - q_2q_3 \dots q_s) \end{aligned} \quad (3)$$

hoặc

$$\begin{aligned} m' &= (q_1q_2 \dots q_s) - (p_1q_2q_3 \dots q_s) \\ &= (q_1 - p_1) q_2q_3 \dots q_s \end{aligned} \quad (4)$$

Từ đẳng thức (4) suy ra m' là số dương vì $p_1 < q_1$ từ đẳng thức (2) suy ra m' nhỏ hơn m. Do đó thì m' phải phân tích được thành thừa số một cách *duy nhất* (không kể thứ tự các thừa số). Từ đẳng thức (3) ta thấy thêm rằng p_1 là thừa số của m': nghĩa là, trong trường hợp này thì từ đẳng thức (4) có thể kết luận rằng p_1 là thừa số của $q_1 - p_1$, hoặc là thừa số của

$p_2p_3 \dots p_s$. (Điều này được suy ra từ sự duy nhất của phân tích m' thành thừa số nguyên tố). Nhưng điều sau là không thể được vì mọi q lớn hơn p. Vì thế p_1 phải là thừa số của $q_1 - p_1$, tức $q_1 - p_1$ chia hết cho p_1. Nói cách khác, có một số h sao cho

$$q_1 - p_1 = p_1 . h \text{ hoặc } q_1 = p_1 (h+1).$$

điều này có nghĩa là q_1 chia hết cho p_1, trái với giả thiết q_1 là nguyên tố. Mâu thuẫn mà ta đi tới chứng tỏ sự không đúng của giả thiết nêu ra đầu tiên. Chứng minh định lý cơ bản về số học kết thúc ở đây. Sau đây là một hệ quả quan trọng của định lý cơ bản. *Nếu số nguyên tố p là thừa số của tích ab thì nó tất phải là thừa số hoặc của a hoặc của b.* Thực vậy, nếu p không phải là thừa số của a và của b thì khi nhân các phân tích thừa số của a và b với nhau ta được phân tích thừa số của ab *không chứa thừa số p.* Mặt khác, do giả thiết p là thừa số của tích ab thì có một số nguyên t sao cho

$$ab = pt$$

Bởi thế, khi nhân p với phân tích thừa số nguyên tố của t ta được phân tích thừa số nguyên tố của số ab *có chứa thừa số p,* Cho nên ta đi đến thừa nhận có hai phân tích thừa số nguyên tố khác nhau của số ab, điều này mâu thuẫn với định lý cơ bản.

Thí dụ: Nếu xác nhận được rằng 2652 chia hết cho 13 và 2652 = 6.442 thì có thể kết luận rằng 442 chia hết cho 13. Mặt khác, 240 chia hết cho 6 và 240 = 15.16 nhưng cả 15 và 16 đều không chia hết cho 6. Thí dụ này chứng tỏ rằng giả thiết p là số nguyên tố trong định lý cơ bản là quan trọng.

2. Sự phân bố các số nguyên tố. Có thể lập bảng liệt kê tất cả các số nguyên tố không vượt quá một số

N cho trước bằng cách sau đây. Viết các số tự nhiên từ 2 đến N theo thứ tự, sau đó xóa đi tất cả các số là bội của 2 (không kể số 2), các số là bội của 3 (không kể 3) v.v... cho đến khi đã xóa hết các hợp số. Quá trình đó nổi tiếng với các tên gọi « sàng Eratôxphen » cho phép giữ lại tất cả các số nguyên tố trong phạm vi từ 2 đến N. Đến nay ta đã lập được những bảng số nguyên tố cho đến 10000000 do cải tiến dần phương pháp này.

Những bảng này cho ta một tài liệu thực nghiệm phong phú nhất để nghiên cứu sự phân bố và các tính chất của số nguyên tố. Dựa vào những bảng đó, ta có thể nêu một loạt các giả thuyết có lý đến nỗi dường như lý thuyết số là một khoa học thực nghiệm. Việc chứng minh những giả thuyết đó thông thường là rất khó.

a) Các công thức cho số nguyên tố

Người ta đã có nhiều cố gắng tìm những công thức cho các số nguyên tố, dù rằng không yêu cầu phải cho *tất cả* các số nguyên tố. Phecma đã cho rằng *(nhưng không khẳng định)* tất cả các số có dạng:

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

là số nguyên tố. Thực vậy, với n=1, 2,3,4 ta được

$$F(1) = 2^2 + 1 = 5$$

$$F(2) = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

là những số nguyên tố. Nhưng đến năm 1732, Ơle đã phân tích được số $2^{2^5} + 1 = 6416700417$ thành thừa số, cho nên số F(5) đã không là số nguyên tố. Sau này

ta còn phải hiện được nhiều hợp số khác trong « các số Phecma » đó. Do những khó khăn không vượt qua được có liên quan với các phép thử trực tiếp mà nhiều phương pháp lý thuyết số sâu sắc đã được hình thành. Hiện nay ta vẫn còn chưa biết công thức Ơle có cho một tập hợp vô hạn các số nguyên tố hay không?

Sau đây là một biểu thức đơn giản và đáng chú ý khác cũng cho được nhiều số nguyên tố:

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

với $n = 1,2,3,\ldots, 40$ thì ($f(n)$ là số nguyên tố; nhưng với $n = 41$ thì không cho số nguyên tố

$$f(41) = 41^2$$

Biểu thức $n^2 - 79n + 1601$ cho các số nguyên tố cho đến $n = 79$, khi $n = 80$ ta được một hợp số. Tóm lại có thể nói rằng việc tìm kiếm các công thức sơ cấp cho các số nguyên tố là uổng công vô ích.

b) Số nguyên tố trong các cấp số cộng

Nếu chứng minh của vấn đề trong dãy số tự nhiên 1,2,3,4... có vô số số nguyên tố là hoàn toàn có tính chất sơ cấp thì việc làm như thế đối với những dãy số như 1,4, 7, 10,13... hoặc 3,7,11,15, 19..., hoặc nói chung đối với một cấp số cộng bất kỳ a, $a + d$, $a + 2d$,..., $a + nd$,... (trong đó a và d không có thừa số chung) gặp khó khăn rất lớn. Mọi sự quan sát chỉ khẳng định một sự kiện là *trong mỗi cấp số như thế có vô số số nguyên tố* cũng giống như trong cấp số đơn giản nhất 1, 2, 3... Đã có nhiều cố gắng lớn lao để chứng minh định lý tổng quát này. Lêgiôn Điriclê (1805 —1859) là một trong những nhà toán học lớn của thế kỷ trước đã đi đến kết quả. Trong khi chứng minh ông đã áp dụng những phương tiện hoàn hảo nhất của giải thích toán học thời đó. Những công trình nổi tiếng của ông trong phạm vi

này vẫn là tuyệt đỉnh đối với cả thời này. Một trăm năm đã qua nhưng vẫn không thể đơn giản hóa chứng minh của Điriclê để những người chưa nắm vững đầy đủ công cụ giải tích toán học và lý thuyết hàm số có thể hiểu được.

Ở đây, chúng ta không có ý định chứng minh định lý tổng quát của Điriclê mà chỉ giới hạn trong một bài toán dễ hơn: mở rộng chứng minh của Ơclich về sự tồn tại vô số số nguyên tố sao cho nó bao gồm được một cấp số đặc biệt như $4n + 3$ hoặc $6n + 5$ chẳng hạn. Ta xét cấp số thứ nhất. Trước hết, ta lưu ý rằng mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều phải lẻ (nếu không thì nó chia hết cho 2 do đó có dạng $4n + 1$ hoặc $4n + 3$ (với n nguyên). Tích của hai số dạng $4n + 1$ cũng là một số có dạng như thế bởi vì:

$$(4a + 1)(4b + 1) = 16ab + 4a + 4b + 1 =$$
$$= 4(4ab + a + b) + 1$$

Bây giờ ta giả thử rằng chỉ có một số hữu hạn số nguyên tố dạng $4n + 3$, ta biểu thị chúng là $p_1, p_2, \ldots, p_n$ và xét số:

$$N = 4(p_1p_2 \ldots p_n) - 1 = 4(p_1p_2 \ldots p_n - 1) + 3$$

Hoặc N nguyên tố, hoặc phân tích được thành tích các nguyên tố, nhưng trong phân tích đó không thể có thừa số nào là một trong các số $p_1, p_2 \ldots p_n$, bởi vì những số như thế chia cho N dư -1.

Bây giờ ta lưu ý rằng mọi thừa số có trong N không thể có dạng $4n + 1$ bởi vì bản thân N không có dạng đó mà tích các số có dạng $4n + 1$ là những số cũng có dạng như thế. Như vậy thì ít nhất một thừa số có trong N phải có dạng $4n + 3$. Điều này có thể xảy ra vì không có số p nào là thừa số của N và tất cả các

số nguyên tố dạng 4n + 3 đã được sử dụng hết. Bởi thế, nếu giả thiết chỉ có một số hữu hạn các số nguyên tố dạng 4n + 3 ta sẽ đi đến mâu thuẫn. Vậy số các số nguyên tố như thế là vô hạn.

c) Định lý về sự phân bố các số nguyên tố

Trong các công trình nghiên cứu có liên quan đến luật phân bố các số nguyên tố thì bước quyết định chỉ đạt được khi nhà toán học từ bỏ ý định vô ích đi tìm một công thức toán học sơ cấp cho tất cả các số nguyên tố hoặc tìm con số chính xác các số nguyên tố có trong n số tự nhiên đầu tiên mà tập trung chú ý vào sự phân bố *trung bình* các số nguyên tố trong tất cả các số tự nhiên.

Với mọi n nguyên ta biểu thị số các số nguyên tố trong các số 1, 2, 3,... n là A_n. Nếu ta tách trong các số đầu tiên của dãy số tự nhiên:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

những số nguyên tố thì ta đếm được ngay một loạt các giá trị A_n:

$A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = A_4 = 2$, $A_5 = A_6 = 3$

$A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = 4$, $A_{11} = A_{12} = 5$,

$A_{13} = A_{14} = A_{15} = A_{16} = 6$, A_{17} $A_{18} = 7$, $A_{19} = 8$ .v.v...

Bây giờ ta lấy một dãy giá trị nhất bất kỳ tăng vô hạn. thí dụ:

$$n = 10, 10^2, 10^3, 10^4 \ldots;$$

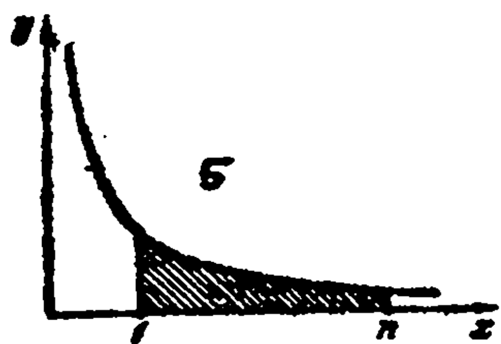
Khi đó dãy giá trị A_n tương ứng A_{10}, A_{10^2}, A_{10^3}, A_{10^4}... cũng sẽ tăng vô hạn (tuy có chậm hơn). Thực vậy, tập hợp số nguyên tố là vô hạn, cho nên giá trị A_n sớm hay muộn sẽ trở nên lớn hơn một số bất kỳ cho trước.

« Mật độ » phân bố các số nguyên tố trong n số đầu tiên của dãy số tự nhiên được cho bởi tỉ số $\frac{A_n}{n}$. Nhờ bảng số nguyên tố ta tính được một cách dễ dàng các $\frac{A_n}{n}$ với những n đủ lớn :

n	A_n/n
10^3	0,168
10^6*	0,078498
10^9	0,050847478

Dòng cuối cùng của bảng trên cho ta xác suất để lấy ra từ 10^9 số tự nhiên đầu tiên là số nguyên tố; tất cả có 10^9 trường hợp xét, trong đó có A_{10^9} trường hợp là tương ứng với số nguyên tố.

Sự phân bố các số nguyên tố riêng biệt có tính chất rất không đều. Nhưng sự không đều đó sẽ biến mất nếu ta chú ý đến sự phân bố « trung bình » tức là tìm biểu thức của nó trong biến thiên của tỷ số $\frac{A_n}{n}$ khi n tăng vô hạn. Qui luật đơn giản mà sự biến thiên của tỉ số này phải tuân theo cần được liệt vào số những phát minh nổi tiếng nhất trong toàn bộ toán học. Muốn phát biểu *định lý về sự phân bố các nguyên tố* trước hết cần giải thích « logarit tự nhiên » của số n là gì. Muốn thế ta lấy hai trục vuông góc với nhau trên mặt phẳng và xét quĩ tích những điểm trên mặt phẳng có tích các khoảng cách x và y đến hai trục bằng đơn vị. Với ngôn ngữ tọa độ thì quỹ tích đó là một hypebôn



H. 5. Diện tích miền có gạch ở dưới hypebol xác định hàm số lnn

cản, phương trình của nó có dạng xy = 1. Ta định nghĩa lnx là *diện tích* (H. 5) của hình giới hạn bởi hypebôn và hai đường thẳng vuông góc x = 1 và x = n. (logarit và tính chất của nó sẽ được xét kỹ hơn trong chương VIII). Hoàn toàn ngẫu nhiên mà thông qua việc nghiên cứu bảng số nguyên tố, Gaux đã thấy rằng tỉ số $\frac{A_n}{n}$ gần bằng $\frac{1}{\ln n}$ và độ chính xác sẽ tăng lên khi a tăng. Căn cứ vào giá trị của tỉ số $\frac{A_n}{n} : \frac{1}{\ln n}$ khi n = 1000, 1000000, 1000000000 trong bảng sau đây để thấy sự xấp xỉ đó là có thể chấp nhận được:

n	A_n/n	$1/\ln n$	$\frac{A_n}{n} : \frac{1}{\ln n}$
10^3	0,168	0,145	1,159
10^6	0,078498	0,072382	1,084
10^9	0,050847478	0,048254942	1,053
...	...	...	...

Dựa trên tính hiển nhiên thực nghiệm kiểu đó, Gaux đã phát biểu rằng tỉ số $\frac{A_n}{n}$ «tiệm cận bằng» 1/lnn. Ý nghĩa của khẳng định này như sau: nếu ta lấy một dãy các giá trị n càng ngày càng lớn, chẳng hạn

$$10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ldots$$

(như ta đã làm ở trên) thì tỉ số $A_n/n : 1/\ln n$ đối với những giá trị n đó theo thứ tự sẽ càng dẫn đến 1, tức là hiệu giữa các tỉ số vừa nêu với đơn vị sẽ nhỏ bao nhiêu cũng được với n đủ lớn. Một hệ thức kiểu đó được ký hiệu bằng dấu $\sim$: biểu thức $\frac{A_n}{n} \sim \frac{1}{\ln n}$ có nghĩa là $\frac{A_n}{n} : \frac{1}{\ln n}$ dẫn tới 1 khi n tăng. Việc không thể thay thế dấu $\sim$ bằng dấu (=) thông thường là rõ ràng vì A_n là số nguyên, trong khi đó thì $\frac{n}{\ln n}$ không nguyên.

Ta không thể không ngạc nhiên trước vấn đề sự phân bố các số nguyên tố được mô tả rất tốt bằng hàm số logarit, bởi vì ở đây có sự kết hợp chặt chẽ giữa hai khái niệm toán học không có gì liên quan với nhau.

Dù rằng không có khó khăn gì đáng kể để nắm được nội dung mệnh đề do Gaux nêu lên, song ở thời của Gaux thì việc chứng minh chặt chẽ về mặt toán học mệnh đề đó lại vượt ra ngoài khả năng của khoa học toán học. Muốn chứng minh định lý về sự phân bố các số nguyên tố — một định lý chỉ nói về các khái niệm toán học sơ cấp nhất — đã phải dùng đến những phương pháp có hiệu lực nhất của toán học hiện đại. Phải chờ đến ngót 100 năm sau, khi mà giải tích đã khá phát triển thì *Ađama* (1896) ở Pari và *Valơ-Putxen* (1896) ở Luvenơ mới chứng minh được định lý về sự phân bố các số nguyên tố. Sau đó thì Mangôltôm và E. Landao đã đơn giản hóa đi và có những bổ sung quan trọng. Trước Ađama đã lâu, trong tác phẩm nổi tiếng của mình về đường lối chiến lược của những cuộc tấn công sắp tới, Riman (1828 — 1866) đã có một bước tiến quan trọng trong phạm vi nói trên. Gần đây nhà toán học

Mỹ Nôbe—Vine đã thay đổi chứng minh để không phải áp dụng số phức trong những khâu chủ yếu của các lập luận dẫn ra. Tuy nhiên, chứng minh của định lý vẫn còn rất phức tạp đối với những người mới bắt đầu làm toán.

d) Còn hai bài toán về số nguyên tố chưa được giải

Trong khi vấn đề phân bố các số nguyên tố (« trung bình ») đã giải đáp xong thì sự đúng đắn của một loạt các giả thuyết khác hoàn toàn hiển nhiên đối với thực nghiệm vẫn chưa được chứng minh.

Trước hết; giả thuyết nổi tiếng của Gôtbakh thuộc loại đó. Gôlbakh (1960 — 1764) không để lại một công trình nào trong lịch sử toán học: ông chỉ nổi tiếng về bài toán mà ông nêu trong bức thư gởi cho Ơle năm 1942. Ông lưu ý đến một sự kiện là bao giờ cũng có thể biểu thị một số chẵn bất kỳ (ngoài số 2 là số nguyên tố) dưới dạng tổng của hai số nguyên tố. Thí dụ $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$ $14 = 7 + 7$, $16 = 13 + 3$, $18 = 11 + 7$, $20 = 13 + 7$..., $48 = 29 + 19$,... $100 = 97 + 3$ v.v... Gôlbkh hỏi Ơle rằng liệu có thể chứng minh điều đó đối với mọi số chẵn hoặc có thể chỉ ra một thí dụ bác bỏ giả thuyết đó hay không. Ơle đã không giải đáp được, sau này cũng chưa có ai giải đáp được. Tính hiển nhiên về mặt thực nghiệm của giả thuyết Gôlbakh là hoàn toàn tin cậy được qua phép thử. Nguồn gốc của những khó khăn ở đây là ở chỗ khái niệm số nguyên tố được định nghĩa qua thuật ngữ *nhân*, trong khi đó thì bài toán đề cập đến *phép cộng*. Nói chung việc tìm mối liên hệ giữa tính chất cộng và tính chất nhân của các số là rất khó. Cách đây không lâu thì việc chứng minh giả thuyết của Gôlbakh còn là một bài toán rất hiểm hóc.

Ngày nay thì tình hình đã không còn như thế nữa. Trong năm 1931, nhà toán học Nga trẻ tuổi nổi tiếng thời bấy giờ Snhirelman (1905 — 1938) đã đạt được một kết quả đáng kể bất ngờ và kỳ lạ đối với mọi chuyên gia về vấn đề này. Ông đã chứng minh được rằng *mọi số nguyên dương đều có thể viết dưới dạng tổng của không quá 800000 số nguyên tố*. Dẫu rằng hai kết quả này có phần nào tính chất khôi hài (so với mục đích chứng minh giả thuyết Gôldakh đề ra ban đầu) nhưng nó là bước đầu trên con đường phải đi. Chứng minh của Snhirelman là trực tiếp và mang tính chất kiến thiết, dù rằng nó không bảo đảm một phương pháp thực tiễn để biểu thị một số nguyên tùy ý dưới dạng tổng các số nguyên tố. Sau này, nhà toán học Nga Vinôgrađôv áp dụng các phương pháp của Gacđa, Litvuđ và của người cộng tác vĩ đại của họ người Ấn Độ Ramanuđjana đã giảm các số hạng từ 800 000 xuống 4. Điều này đã rất gần với lời giải bài toán của Gôlbakh. Nhưng giữa các kết quả của Snhirelman và của Vinôgrađôv có sự khác nhau rất rõ rệt, còn rõ hơn sự khác biệt giữa các số 800 000 và 4. Định lý của Vinôgrađôv đã được chứng minh chỉ đối với mọi số « đủ lớn »; nói chính xác hơn thì Vinôgrađôv đã xác nhận *sự tồn tại* một số N để cho mọi số nguyên n > N có thể biểu thị dưới dạng tổng của bốn số nguyên tố. Phương pháp của Vinôgrađôv không cho phán đoán gì về đại lượng N. Trái ngược với phương pháp của Snhirelman, nó thực sự « gián tiếp » và không kiến thiết. Vinôgrađôv đã chứng minh như sau : nếu giả thử rằng có *một tập hợp vô hạn số không biểu thị được dưới dạng tổng của bốn (hoặc ít hơn) số nguyên tố* thì có thể đi đến mâu thuẫn. Ở đây, ta có một thí dụ tuyệt đẹp chứng tỏ sự khác

biệt sâu sắc giữa hai kiểu chứng minh trực tiếp và gián tiếp (xem lý luận tổng quát về vấn đề này ở trang 49)[1].

Bài toán thứ hai còn thú vị hơn bài toán của Vôlbakh, cho đến nay chưa ai đi gần tới lời giải của nó cả. Người ta để ý thấy không ít những cặp số nguyên tố dạng p và p + 2. Chẳng hạn 3 và 5, 11 và 13, 29 và 31 v.v... Giả thuyết về sự tồn tại một tập hợp vô hạn những « kẻ láng giềng » như vậy xem ra rất có lý, nhưng cho đến nay chưa có ai đi gần đến chứng minh của nó cả.

---

1. Kết quả cơ bản của Vônôgrađôv (1937) xác nhận sự tồn tại số tự nhiên N sao cho mọi số lẻ n > N được biểu thị dưới dạng tổng của ba số nguyên tố:

$$n = p_1 + p_2 + p_3 \qquad (1)$$

Dĩ nhiên, từ đó có thể suy ra rằng mọi số tự nhiên $n \geqslant N + 2$ có thể biểu thị dưới dạng tổng của *bốn* số nguyên tố. Kết quả của Vinôgrađôp về các số *lẻ* đã kết thúc — không thể giảm số các số hạng (3 số hạng) trong phát biểu của nó. Đối với các số *chẵn* thì, từ biểu thức của chúng dưới dạng (1) suy ra được ngay tính biểu diễn được của mọi số chẵn n dưới dạng tổng của hai số nguyên tố (loại trừ trường hợp một trong các số chẵn bằng 2). Tuy rằng giả thuyết về tính biểu diễn được dưới dạng đó của mọi số chẵn n > 3 là rất có lý, nhưng bài toán chứng minh nó là cực kỳ khó và vượt quá khả năng của các nhà toán học. Năm 1939, K.G. Bôrôzkinưi đã xóa bỏ tính vô hiệu của định lý Vinôgrađôv. Ông chỉ ra rằng mọi số lẻ $n > C = e^{e^{e^{41,96}}}$ biểu diễn được dưới dạng (1). Năm 1956, ông đã giảm sự đánh giá đó đến $C = e^{e^{17}}$. Tất nhiên, sự giảm hằng số C tới những giới hạn cho phép giải đáp giả thuyết về tính biểu diễn được dưới dạng (1) của các số lẻ n, 0 > n > C, tức là với mọi số lẻ n > 6 được thực hiện nhờ kiểm tra bằng tính toán trực tiếp.

§2. SỰ ĐỒNG DƯ

1. Khái niệm chung. Mỗi lần phải nói đến tính chia hết của các số nguyên cho một số nhất định nào đó thì mọi lập luận sẽ trở nên đơn giản và sáng rõ hơn nếu ta dùng quan hệ đừng dư do Gaux đưa ra cùng với những ký hiệu tương ứng. Để đưa khái niệm đồng dư vào ta hãy xét các số dư có được khi chia những số khác nhau cho 5 chẳng hạn. Ta có:

$0 = 0 . 5 + 0$	$7 = 1 . 5 + 2$	$-1 = -1 . 5 + 4$
$1 = 0 . 5 + 1$	$8 = 1 . 5 + 3$	$-2 = -1 . 5 + 3$
$2 = 0 . 5 + 2$	$9 = 1 . 5 + 4$	$-3 = -1 . 5 + 2$
$3 = 0 . 5 + 3$	$10 = 2 . 5 + 0$	$-4 = -1 . 5 + 1$
$4 = 0 . 5 + 4$	$11 = 2 . 5 + 1$	$-5 = -1 . 5 + 0$
$5 = 1 . 5 + 0$	$12 = 2 . 5 + 2$	$-6 = -2 . 5 + 4$
$6 = 1 . 5 + 1$	v.v...	v.v...

Ta để ý rằng số dư trong phép chia cho 5 chỉ có thể là một trong các số 0, 1, 2, 3, 4. Ta nói rằng hai số a và b *đồng dư theo môđun* 5 nếu chúng cho *cùng một số dư* khi chia chúng cho 5. Chẳng hạn các số 2, 7, 12, 17, 22, ..., −3, −8, −13, −18,... là đồng dư theo môđun 5 bởi vì khi chia cho 5 chúng đều cho dư 2. Tổng quát, ta nói rằng hai số a và b đồng dư theo môđun d (d là một số nguyên nào đó) nếu khi chia cho d chúng cho cũng một số dư, hay nói cách khác, nếu có một số nguyên n (dương, âm hoặc 0) sao cho $a - b = nd$. Thí dụ, 27 và 15 đồng dư theo môđun 4 bởi vì $27 = 6 . 4 + 3$, $15 = 3 . 4 + 3$.

Đối với quan hệ đồng dư ta đưa vào ký hiệu đặc biệt — nếu a và b đồng dư theo môđun d thì ta viết $a \equiv b \pmod d$. [Nếu a không đồng dư với b theo môđun d thì ta viết: $a \not\equiv b \pmod d$]. Nếu đã rõ là môđun nào thì ta có thể bỏ « mod d » đi.

Sự đồng dư thường được gặp trong đời sống sinh hoạt hàng ngày. Thí dụ, kim giờ chỉ thời gian theo môđun 12 đồng hồ ôtô ghi quãng đường đi được theo môđun 100000 (hải lý hoặc km).

Trước khi xét kỹ hơn phép đồng dư và các tính chất, đề nghị bạn đọc kiểm tra lại xem các mệnh đề sau đây có tương đương không:

1. a đồng dư với b theo môđun d.
2. $a = b + nd$, n nguyên.
3. $a - b$ chia hết cho d.

Ký hiệu của phép đồng dư do Gaux đưa ra nhằm nhấn mạnh một sự kiện là đồng dư thức có nhiều tính chất của các đẳng thức thông thường. Ta nhắc lại những tính chất đó:

1) Luôn luôn có $a = a$
2) Nếu $a = b$ thì $b = a$
3) Nếu $a = b$ và $b = c$ thì $a = c$.

Ngoài ra nếu $a = a'$ và $b = b'$, thì

4) $a + b = a' + b'$
5) $a - b = a' - b'$
6) $ab = a'b'$

Những tính chất này được bảo toàn nếu quan hệ bằng nhau $a = b$ được thay thế bằng quan hệ đồng dư $a \equiv b \pmod{d}$. Tức là:

1') Luôn luôn có $a \equiv a \pmod{d}$.
2') Nếu $a \equiv b \pmod{d}$ thì $b \equiv a \pmod{d}$.
3') Nếu $a \equiv b \pmod{d}$ và $b \equiv c \pmod{d}$ thì
$a \equiv c \pmod{d}$.

(Bạn đọc hãy thử lại xem! – điều này không khó,
Cũng vậy, nếu $a \equiv a' \pmod{d}$ và $b \equiv b' \pmod{d}$ thì:
4') $a + b \equiv a' + b' \pmod{d}$
5') $a - b \equiv a' - b' \pmod{d}$
6') $ab \equiv a'b' \pmod{d}$.

Cho nên *ta có thể cộng, trừ* và *nhân các đồng dư thức theo cùng một môđun*. Thực vậy, từ:

$$a = a' + rd, \quad b = b' + sd$$

suy ra:

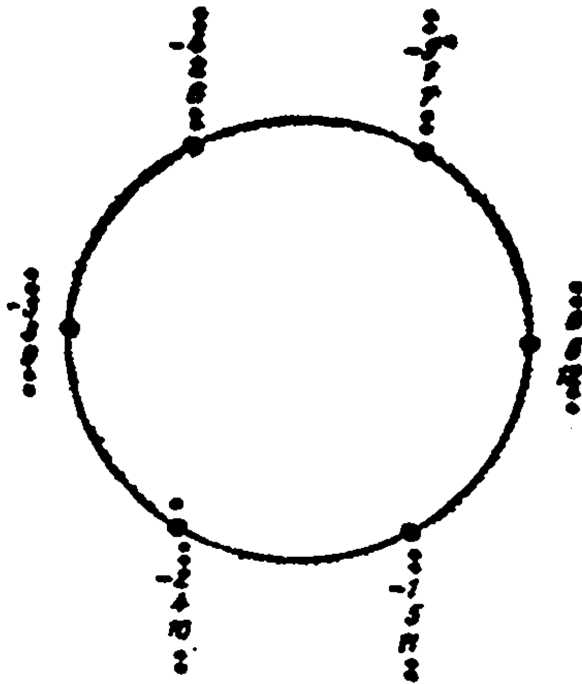
$$a + b = a' + b' + (r + s)\,d,$$
$$a - b = a' - b' + (r - s)\,d$$
$$ab = a'b' + (a's + b'r + rsd)\,d,$$

những đẳng thức này sẽ dẫn đến các kết luận cần thiết. Phép đồng dư cũng thừa nhận một biểu diễn hình học tuyệt diệu. Nếu ta muốn cho các số nguyên một biểu diễn hình học thì ta chọn một đoạn thẳng có độ dài đơn vị rồi đặt những đoạn là bội của đơn vị về cả hai phía. Như thế, mỗi số nguyên có một điểm tương ứng trên đường thẳng — trục số (H.6). Nhưng, nếu



H.6. Biểu diễn hình học các số nguyên

ta xét các số theo một môđun d cho trước thì hai số đồng dư được xem như không có gì phân biệt vì chúng cho cùng một số dư trong phép chia cho d. Muốn biểu diễn bằng hình học những điều trên ta chia một đường tròn thành d phần bằng nhau. Mọi số nguyên khi chia cho d cho số dư là một trong các số 0, 1, 2 ..., d — 1: những số này được phân bố trên đường tròn với những khoảng bằng nhau. Mỗi số đều đồng dư với một trong các số nói trên theo môđun d, do đó sẽ được biểu diễn bởi điểm tương ứng; hai số là đồng dư nếu chúng được diễn bởi cùng một điểm. Trường hợp d = 6 được biểu thị trên hình 7. Mặt đồng hồ cũng có thể coi là một mô hình như thế.



H.7. Biểu diễn hình học các số nguyên theo môđun 6.

Để làm thí dụ cho việc áp dụng tính chất nhân của phép đồng dư (tính chất 6') ta sẽ xác định dư trong phép chia các lũy thừa liên tiếp của 10 cho cùng một số. Vì $10 = -1 + 11$ cho nên

$$10 \equiv -(\text{mod } 11)$$

Nhân nhiều lần đồng dư thức đó với nhau ta được:

$$10^2 \equiv (-1)(-1) = 1 \quad (\text{mod } 11)$$

$$10^3 \equiv -1 \quad (\text{mod } 11)$$

$$10^4 \equiv 1 \quad (\text{mod } 11)$$

Từ đó ta có thể kết luận rằng mọi số nguyên viết trong hệ thập phân có dạng:

$$Z = a_0 + a_1 . 10 + a_2 10^2 + ... + a_n . 10^n$$

cho cùng một số dư khi chia cho 11 với tổng các chữ số lấy dấu xen kẽ nhau của z:

$$t = a_0 - a_1 + a_2 - ...$$

Thực vậy, ta có

$$Z - t = a_1 11 + a_2(10^2 - 1) + a_3(10^3 + 1) + a_4(10^4 - 1) + ...$$

Vì mọi biểu thức $10^2 - 1$, $10^3 + 1$,... đồng dư với 0 theo môđun 11 nên $Z - t$ cũng đồng dư với 0, vì thế khi chia cho 11 thì Z và t có cùng đồng dư. Nói riêng, một số chia hết cho 11, tức là số dư 0 khi chia cho 11, khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó với dấu xen kẽ chia hết cho 11. Thí dụ, số $z = 3162819$ chia hết cho 11 vì $3 - 1 + 6 - 2 + 8 - 1 + 9 = 22$ chia hết cho 11. Cũng bằng cách như vậy thì việc tìm qui tắc chia hết

cho 3 hoặc cho 9 còn đơn giản hơn bởi vì $10^n \equiv 1$ (mod 3 và 9), cho nên $10^n - 1$ (mod 3 và 9) với mọi n. Do đó, Z chia hết cho 3 và cho 9 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó

$$s + a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_n$$

chia hết cho 3 và cho 9.
nếu lấy môđun là 7 thì ta có :

$$10 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv -1,\ 10^4 \equiv -3,$$
$$10^5 \equiv -2,\ 10^6 \equiv 1 \ldots$$

những số dư tiếp theo được lặp lại. Vì thế Z chia hết cho 7 khi và chỉ khi biểu thức

$$r = a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7 + \ldots$$

chia hết cho 7. Khi ta cộng và nhân các đồng dư thức theo một môđun nhất định, chẳng hạn $d = 5$, muốn cho các số không quá lớn, có thể thay số đã cho bằng một trong các số 0, 1, 2, 3, 4 đồng dư với nó. Thí dụ, khi tính tổng và tích theo môđun 5 của những số khác nhau chỉ cần dùng bảng cộng và bảng nhân sau đây :

a + b	b = 0	1	2	3	4
a = 0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

ab	b = 0	1	2	3	4
a = 0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Qua bảng thứ hai ta thấy rằng tích ab đồng dư với 0 theo môđun 5 khi và chỉ khi a hoặc $b \equiv 0$ (mod 5). Điều này gợi ta suy nghĩ về sự tồn tại định luật tổng quát sau :

7) $ab \equiv 0$ (mod d) chỉ khi $a \equiv 0$ hoặc $b \equiv 0$ (mod d), là sự mở rộng tính chất của phép nhân thông thường rất quen biết : $ab = 0$ chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Những định luật 7) chỉ đúng với điều kiện môđun d là số nguyên tố. Thực vậy, đồng dư thức

$$ab \equiv 0 \pmod{d}$$

có nghĩa là ab chia hết cho d, mà ta đã biết rằng tích ab chia hết cho số nguyên tố d khi và chỉ khi một trong các thừa số a hoặc b chia hết cho d tức là nếu:

Mặt khác, định luật sẽ không còn đúng khi d là hợp số; lúc đó có thể viết $d = r \cdot s$ trong đó cả hai thừa số r và s nhỏ hơn d và

$$r \not\equiv 0 \pmod{d}, \qquad s \not\equiv 0 \pmod{d}$$

nhưng $rs = d \equiv 0 \pmod{d}$.

Thí dụ, $2 \not\equiv 0 \pmod{6}$ và $3 \not\equiv 0 \pmod{6}$,

nhưng $2 \cdot 3 = 6 \equiv 0 \pmod{6}$.

2. Định lý Fecma. Trong thế kỷ 17, Phecma người sáng lập lý thuyết số hiện đại đã phát hiện một định lý cực kỳ quan trọng. Nếu p là số nguyên tố không chia hết số nguyên a thì

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Nói cách khác, lũy thừa bậc (p — 1) của a chia cho p dư 1. Một số tính toán mà ta đã thực hiện ở trên đã xác nhận định lý này: chẳng hạn ta thấy rằng

$10^6 \equiv 1 \pmod{7}$;

$10^2 \equiv 1 \pmod{3}$ và $10^{10} \equiv 1 \pmod{13}$.

Cũng vậy dễ dàng thử lại rằng $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ và $5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Muốn vậy, thực ra không cần tính lũy thừa bậc cao của các số đã cho, chỉ cần dùng tính chất nhân của các đồng dư thức:

$2^4 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$, $5^2 \equiv 3 \pmod{11}$

$2^8 \equiv 9 \equiv 4 \pmod{13}$, $5^4 \equiv 9 \equiv -2 \pmod{11}$

$5^8 \equiv 4 \pmod{11}$

$2^{12} \equiv -4 \cdot 3 = -12 \equiv 1 \pmod{13}$, $5^{10} \equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$

Để chứng minh định lý Phecma ta hãy xét các số là bội của a:

$$m_1 = a,\ m_2 = 2a,\ m_3 = 3a, \ldots\ m_{p-1} = (p-1)a.$$

Không có bất kỳ hai số nào trong đó có thể đồng dư với nhau theo môđun p. Nếu không p phải chia hết hiệu $m_r - m_s = (r - s)\,a$, trong đó r và s là cặp số nguyên nằm trong giới hạn $1 \leqslant r < s \leqslant (p-1)$. Nhưng từ định luật 7), ta thấy rằng điều đó không thể xảy ra: vì r — s nhỏ hơn p, nên p không chia hết s — r; mặt khác, theo giả thiết p không chia hết a. Cũng vậy, ta thấy không một số m nào đồng dư với 0 cả. Từ đó suy ra các số $m_1, m_2, \ldots m_{p-1}$ tương ứng đồng du với các số 1,2,..., p — 1 (có thể có thay đổi thứ tự nào đó giữa các số này).

Ta có:

$$m_1 m_2 \ldots m_{p-1} = 1\,.\,2\,.\,3 \ldots (p-1)\,a^{p-1} \equiv$$
$$\equiv 1\,.\,2\,.\,3 \ldots (p-1) \pmod p,$$

hoặc để cho gọn: đặt $K = 1\,.\,2\,.\,3.\ldots(p-1)$, ta có:

$$K\,(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p).$$

Số K không chia hết cho p vì không có thừa số nào chia hết cho p; nghĩa là theo định luật 7) thì $(a^{p-1}-1)$ phải chia hết cho p hay

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p).$$

Đó là định lý ph Fecma.

Ta thử lại định lý này một lần nữa. Ta lấy p = 23 và a = 5. Như vậy theo môđun 2^3 thì $5^2 \equiv 2$, $5^4 \equiv 4$, $5^8 \equiv 16 \equiv -7$, $5^{16} \equiv 49 \equiv 3$, $5^{20} \equiv 12$, $5^{22} \equiv 24 \equiv 1$. Nếu ta lấy a = 4 thay cho 5 thì theo môđun 23, ta sẽ có $4^2 \equiv -7$, $4^3 \equiv -28 \equiv -5$, $4^4 \equiv -20 \equiv 3$, $4^8 \equiv 9$, $4^{11} \equiv -45, \equiv 1$, $4^{22} \equiv 1$. Trong thí dụ a = 4, p = 23 (cũng như trong nhiều thí dụ khác), cần chú ý rằng không những chỉ lũy thừa bậc (p—1) mà cả lũy thừa

bậc thấp hơn nữa của a cũng đã đồng dư với đơn vị. Trong thí dụ của ta thì lũy thừa nhỏ nhất đó là 11, *tất phải* là ước số của p−1.

3. Thặng dư toàn phương. Trở lại các thí dụ minh họa định lý Phecma, ta lưu ý rằng đồng dư thức $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ không những luôn luôn đúng, mà đồng dư thức $a^{p'} = a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ cũng đúng với một số giá trị a (với giả thiết p là nguyên tố khác 2, tức là p lẻ: $p = 2p' + 1$). Tình hình đó làm nảy sinh một loạt giả thuyết đáng được chú ý. Định lý Phecma có thể viết dưới dạng sau:

$$a^{p-1} - 1 = a^{2p'} - 1 = (a^{p'} - 1)(a^{p'} + 1) \equiv 0 \pmod p$$

Vì một tích số chỉ chia hết cho p khi một trong các thừa số chia hết cho p, nghĩa là một trong các số $a^{p'} - 1$ hoặc $a^{p'} + 1$ phải chia hết cho p, cho nên với mọi số nguyên tố $p > 2$ và với mọi a không chia hết cho p tất phải có một trong hai đồng dư thức sau đây:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad \text{hoặc} \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

Ngay từ lúc phát sinh lý thuyết số hiện đại, các nhà toán học đã bị thu hút vào việc giải quyết vấn đề: với những số a nào thì đồng dư thức thứ nhất đúng, với những số a nào thì đồng dư thức thứ hai đúng? Ta giả thử rằng a đồng dư với bình phương của một số x nào đó theo mod p: $a \equiv x^2 \pmod p$. Như vậy thì $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1}$; theo định lý Phecma thì vế trái của đồng dư thức đó phải đồng dư với 1 theo môđun p. Số a (không phải là bội của p) đồng dư với bình phương của một số nào đó như thế được gọi là *thặng dư toàn phương* của p; ngược lại, một số b không phải là bội của p không đồng dư với một bình phương

nào, theo môđun p được gọi là *phi thặng dư toàn phương của p.* Ta vừa thấy rằng mọi thặng dư toàn phương a của số p thỏa mãn đồng dư thức $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. Dễ thấy rằng mọi phi thặng dư của số p thỏa, mãn đồng dư thức $b^{\frac{-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. Hơn nữa, ta sẽ chứng minh rằng (về sau này) rằng trong các số 1, 2 3, ... , p − 1 có đúng $\frac{p-1}{2}$ thặng dư toàn phương và $\frac{p-1}{2}$ phi thặng dư toàn phương.

Tuy dựa vào cách tính trực tiếp ta đã có thể thu thập được một số không ít các dữ kiện thực nghiệm, nhưng việc phát hiện ra những qui luật chung chi phối cách phân bố các thặng dư toàn phương không phải dễ. Một tính chất sâu sắc đầu tiên của hai thặng dư đó đã được Lơgiăng (1752 − 1833) phát hiện; sau này Gaux gọi nó là *định luật đối ngẫu*. Định luật đó nói về quan hệ tương hỗ giữa hai số nguyên tố p và q khác nhau. Nó như sau:

1. Giả thử rằng tích $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ là chẵn. Như vậy q là thặng dư của p khi và chỉ khi p là thặng dư của q.

2. Ngược lại, giả thử rằng tích nói trên là *lẻ*. Bây giờ thì tình hình đã thay đổi hẳn: q là thặng dư của p nếu p là *phi thặng dư* của q và ngược lại. Chứng minh chặt chẽ đầu tiên của định luật đối ngẫu — một định luật mà một thời gian dài vẫn còn là giả thuyết — do Gaux nêu ra từ hồi còn trẻ là một trong những thành tựu vĩ đại của ông. Chứng minh của Gaux hoàn toàn không thể

coi là tầm thường, đến ngày nay thì việc chứng minh định luật đối ngẫu vẫn còn là một lao động đáng kể, dẫu rằng khối lượng các chứng minh khác nhau đã được công bố là rất lớn. Ý nghĩa thực sự của định luật đối ngẫu đến thời gian gần đây vẫn còn chưa được phát hiện — nó có liên quan đến sự phát triển mới nhất của lý thuyết đại số về số học.

Để làm thí dụ minh họa cho sự phân bố các thặng dư toàn phương, ta lấy $p = 7$. Vì theo môđun 7 thì:
$0^2 \equiv 0$, $1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 2$, $4^2 \equiv 2$, $5^2 \equiv 4$, $6^2 \equiv 1$
và vì các bình phương tiếp theo lặp lại dãy đó, cho nên thặng dư toàn phương của 7 là các số đồng dư với 1, 2 và 4, còn các phi thặng dư là những số đồng dư với 3, 5 và 6. Tổng quát thì các thặng dư toàn phương của p gồm các số đồng dư với các số $1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$. Nhưng những số này từng cặp đồng dư với nhau vì:

$$x^2 \equiv (p-x)^2 \pmod p \text{ (thí dụ } 2^2 \equiv 5^2 \pmod 7))$$

Thực vậy, $(p-x)^2 = p^2 - 2px + x^2 \equiv x^2 \pmod p$. Nghĩa là một nửa các số $1, 2, \ldots, p-1$ là các thặng dư toàn phương của p, còn nửa kia là các phi thặng dư. Muốn cho một minh họa của định luật đối ngẫu, ta đặt $p = 5$, $q = 11$. Vì $11 \equiv 1^2 \pmod 5$, cho nên 11 là thặng dư toàn phương theo môđun 5, và vì tích $\frac{5-1}{2} \cdot \frac{11-1}{2}$ là chẵn cho nên theo định luật đối ngẫu thì 5 cũng phải là thặng dư toàn phương theo môđun 11; thực vậy, ta thấy rằng $5 \equiv 4^2 \pmod{11}$. Mặt khác, ta đặt $p = 7$, $q = 11$. Lúc này tích $\frac{7-1}{2} \cdot \frac{11-1}{2}$ là lẻ, 11 là thặng dư theo môđun 7 (vì $11 \equiv 2^2$ (môđun 7)), còn 7 là phi thặng dư theo môđun 11.

Định lý Pitago có liên quan đến một vấn đề thú vị trong phạm vi lý thuyết số. Định lý đó, như đã biết được biểu thị một cách đại số bằng đẳng thức:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1)$$

trong đó a và b là độ dài các cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền, vấn đề tìm tất cả các tam giác vuông, mà các cạnh của chúng được biểu thị bằng cac số nguyên tương đương với vấn đề tìm tất cả các nghiệm nguyên (a, b, c) của phương trình (1). Mỗi bộ ba số nguyên (a, b, c) thỏa mãn phương trình đó có tên là *bộ ba Pitago.*

Có thể tìm mọi bộ ba Pitago một cách khá đơn giản. Giả thử các số nguyên a, b. c lập thành một bộ ba Pitago, tức là có hệ thức $a^2 + b^2 = c^2$ Để cho gọn ta đặt $\frac{a}{c} = x$, $\frac{b}{c} = y$. Như thế x và y là các số hữu tỷ liên kết bởi đẳng thức $x^2 + y^2 = 1$. Từ đó suy ra:

$y^2 = (1 - x)(1 + x)$ hoặc $\frac{y}{1+x} = \frac{1-x}{y}$. Giá trị chung của hai tỉ số là số t, số này có thể biểu thị như tỉ số của hai số nguyên $\frac{u}{v}$. Hơn nữa, có thể viết

$y = t(1 + x)$ và $(1 - x) = ty$ hoặc:

$$tx - y = -t$$
$$x - ty = 1$$

Từ hệ phương trình này suy ra ngay rằng:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Thế $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{c}$ vào chỗ của x và y và thay $\frac{u}{v}$ vào chỗ của t, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{v^2 - u^2}{u^2 + v^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} a = (v^2 - u^2)\, r, \\ b = (2uv)\, r, \\ c = (u^2 + v^2)\, r, \end{cases} \qquad (2)$$

trong đó r là một thừa số hữu tỉ nào đó của tỷ lệ thức Như vậy, nếu các số (a, b, c) lập thành một bộ ba Pitago thì chúng tương ứng tỷ lệ với các số có dạng $v^2 - u^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$. Đảo lại, dễ dàng thử lại rằng mọi bộ ba số (a, b, c) được xác định bởi các đẳng thức có dạng (2) sẽ lập thành bộ ba Pitago bởi vì từ các đẳng thức (2) ta suy ra:

$$\begin{aligned} a^2 &= (u^4 - 2u^2v^2 + v)\, r^2, \\ b^2 &= (4u^2v^2)\, r^2 \\ c^2 &= (u^4 + 2u^2v^2 + v^4)\, r^2, \end{aligned}$$

do đó mà $a^2 + b^2 = c^2$

Kết quả nầy có thể đơn giản đi một chút. Từ một bộ ba Pitago nào đó (a, b, c) suy ra dễ dàng một tập hợp vô hạn các bộ ba Pitago khác (sa, sb, sc) với mọi số nguyên dương s. Chẳng hạn, từ (3, 4, 5) ta được 6, 8, 10), (9, 12, 15) vv... Những bộ ba như vậy không khác nhau cơ bản vì chúng tương ứng với những tam giác đồng dạng. Chúng ta quy ước nói về bộ ba Pitago *nguyên thủy* nếu các số a, b và c không có thừa số chung. Có thể chứng minh rằng các công thức:

$$\begin{aligned} a &= v^2 - u^2 \\ b &= 2uv \\ c &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

trong đó u và v là những số nguyên dương bất kỳ ($v>u$) không có thừa số chung và không đồng thời cùng lẻ sẽ cho chúng ta tất cả các bộ ba Pitago nguyên thủy. Đây là những thí dụ về bộ ba Pitago nguyên thủy:

$v = 2$, $u = 1$ (3, 4, 5), $v = 4$, $u = 3$ (7, 24, 25)
$v = 3$, $u = 2$ (5, 12, 13); $v = 10$, $u = 7$ (51, 140, 149)
v.v...

Trong khi nghiên cứu những số Pitago thì tất nhiên nảy ra vấn đề về khả năng mở rộng sau đây của bài toán. Có thể tìm được những số nguyên dương a, b, c thỏa mãn phương trình $a^3 + b^3 = c^3$ hoặc phương trình $a^4 + b^4 = c^4$, hoặc tổng quát, phương trình

$$a^n + b^n = c^n \tag{3}$$

trong đó n là số nguyên lớn hơn 2 hay không? Bằng con đường tự biện Phecma đã cho câu giải đáp. Fecma đã nghiên cứu một tác phẩm của Điôphăng — nhà toán học nổi tiếng thời cổ nghiên cứu về lý thuyết số – và có thói quen ghi chú trên lề sách. Mặc dù ông không có ý định dẫn ra ở đó chứng minh của nhiều định lý mà ông đã đề xuất—tất cả những định lý ấy sau này đã được chứng minh dần—chỉ trừ một trường hợp ngoại lệ rất đặc biệt. Nhân vấn đề số Pitago, Fecma đã ghi chú rằng phương trình (3) không giải được trong phạm vi số nguyên nếu $n > 2$, nhưng vì chứng minh mà ông tìm được quá dài nên không thể ghi vào lề cuốn sách đó được.

Chưa có ai và chưa bao giờ chứng minh dưới dạng tổng quát hoặc bác bỏ khẳng định này của Phecma mặc dù có sự cố gắng của nhiều nhà toán học lớn. Định lý đã được chứng minh cho rất nhiều giá trị của n, nói riêng đối với $n < 619$, nhưng chưa phải đối với mọi giá trị có thể được của n; đồng thời cũng chưa có ai nêu ra được một thí dụ nào để bác bỏ định lý. Tuy

định lý này bản thân nó không có ý nghĩa lớn về mặt toán học, nhưng ý định chứng minh nó đã là nguồn gốc của nhiều công trình nghiên cứu quan trọng nhất trong phạm vi lý thuyết số. Bài toán đã gây nên sự quan tâm rộng rãi, một phần là nhờ giải thưởng 100.000 mác tặng cho người đầu tiên giải được nó, nhất là giải thưởng này lại được Viện hàn lâm Gơttinghen trao tặng. Hằng năm vẫn có một số lớn « bài giải » có sai lầm được gửi tới cho đến khi giải thưởng này không còn giá trị bằng tiền do nạn lạm phát sau chiến tranh ở nước Đức. Ngay cả những chuyên gia toán học cũng nhiều lần vội vã cho công bố những chứng minh mà sau đó đã bị bác bỏ vì phát hiện ra những sơ hở rất tầm thường. Bài toán của Phecma bị lắng xuống một ít từ khi giảm giá đồng mác. Tuy nhiên báo chí vẫn luôn luôn loan tin rằng lời giải bài toán đã được một « thiên tài » mới xuất hiện nào đó tìm ra.

§ 4. ALGÔRIT CỦA ƠCLID

1. Lý thuyết tổng quát. Bạn đọc đã làm quen với quá trình thông thường của phép chia « kéo dài » một số nguyên a cho một số nguyên khác b và biết rằng có thể kéo dài quá trình cho đến khi số dư chưa nhỏ hơn số chia. Thí dụ, nếu $a = 648$ và $b = 7$ thì ta được thương số $q = 92$ và số dư $r = 4$.

$$\begin{array}{r|l} 648 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{63} & 92 \\ 18 & \\ \underline{14} & \\ 4 & \end{array} \qquad 648 = 7.92 + 4$$

Nhân vấn đề này ta có thể phát biểu một định lý tổng quát sau đây: nếu a và b là những số nguyên trong đó b khác 0 thì bao giờ cũng có một số nguyên q sao cho:

$$a = b.q. + r, \quad (1)$$

trong đó r là một số nguyên thỏa mãn bất đẳng thức $0 < r < b$.

Ta sẽ chứng minh định lý này một cách độc lập với qui trình của phép chia kéo dài. Chỉ cần lưu ý rằng số a là bội của số b hoặc nằm giữa hai bội liên tiếp của b:

$$bq < a < b(q+1) = bq + b$$

Trong trường hợp thứ nhất, đẳng thức (1) đúng với $r = 0$. Trong trường hợp thứ hai thì từ bất đẳng thức thứ nhất ta suy ra: $a - bq = r < 0$, và từ bất đẳng thức thứ hai thì: $a - bq = r < b$, trong trường hợp này số r thỏa mãn điều kiện $0 < r < b$. Từ đó ta có thể rút ra một số lớn các hệ quả quan trọng khác nhau. Hệ quả thứ nhất là phương pháp để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên.

Giả sử a và b là hai số nguyên nào đó không đồng thời bằng 0. Ta xét tập hợp các số nguyên chia hết a và b. Tất nhiên tập hợp này hữu hạn vì, nếu $a \neq 0$ chẳng hạn, thì một số nào đó lớn hơn a không thể là ước số của a. Từ đó suy ra số các ước số chung của a và b là hữu hạn; giả thử d là số lớn nhất trong những số đó. Số d được gọi là ước so chung lớn nhất của a và b, ta qui ước biểu thị là $d = (a, b)$. Chẳng hạn, nếu $a = 8$, $b = 12$ thì phép thử trực tiếp chứng tỏ rằng $(8,12) = 4$; nếu $a = 5$, $b = 9$ thì cũng bằng cách thử như vậy ta được $(5,9) = 1$. Nếu a và b là những số khá lớn chẳng hạn $a = 1804$, $b = 328$ thì việc thử trực tiếp để tìm

ước số chung lớn nhất sẽ rất vất vả. Một phương pháp ngắn gọn hơn và hoàn toàn có hiệu lực được suy ra từ *algôrit Oclid* (Algôrit là mọi phương pháp tính đã được hệ thống hóa). Algôrit đó dựa trên sự kiện là, từ hệ thức có dạng $a = b \cdot q + r$ phải suy ra được:

$$(a, b) = (b, r) \qquad (3)$$

Thực vậy, mọi số u đồng thời chia hết a và b: $a = su$, $b = tu$,
cũng chia hết r vì $r = a - bq = su - qtu = (s - qt) u$, và đảo lại, một số v đồng thời chia hết b và r: $[b = s'v,\ r = t'v]$
cũng chia hết a vì $a = bq + r = s'vq + t'v = (s'q + t')v$. Nghĩa là mỗi ước số chung của a và b đồng thời là ước số chung của b và r và ngược lại. Nhưng, nếu tập hợp các ước số chung của a và b trùng với tập hợp các ước số của b và r thì rõ ràng ước số chung lớn nhất của a và b phải trùng với ước số chung lớn nhất của b và r. Điều này được biểu thị bởi đẳng thức (3). Bây giờ ta sẽ thấy rõ ích lợi của sự kiện vừa được xác nhận.

Muốn vậy, ta trở lại thí dụ tìm ước số chung lớn nhất của các số 1803 và 328. Phép chia «kéo dài» thông thường

$$\begin{array}{r|l} 1804 & 328 \\ \cline{2-2} 1640 & 5 \\ \hline 164 & \end{array}$$

đưa ta đến kết luận rằng:

$$1804 = 5.328 + 164$$

Từ đó, do (3) suy ra

$$(1804, 328) = (328, 164).$$

Ta để ý rằng bài toán tính ước số chung lớn nhất của (1804, 328) được thay thế bằng một bài toán tương tự nhưng với những số nhỏ hơn. Có thể kéo dài quá trình đó. Vì

$$\begin{array}{r|l} 328 & 162 \\ \cline{2-2} 328 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

cho nên ta có $328 = 2.164 + 0$ và $(328, 164) = 164,0) = 164$. Nghĩa là $(1804,328) = (328, 164) = (164,0) = 164$ và ước số chung lớn nhất đã được tìm thấy.

Chính quá trình tìm ước số chung lớn nhất đó của hai dưới dạng hình học trong «Khởi số đã được mô tả đầu» của Ơclid. Chúng ta sẽ mô tả tổng quát qui trình đó dưới hình thức số học với các số nguyên tùy ý a và b không đồng thời bằng 0. Vì rõ ràng rằng $(a,0) = a$ cho nên có thể giả thiết rằng $b \neq 0$. Phép chia liên tiếp dẫn ta đến dây chuyền đẳng thức:

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & (0 < r_1 < b) \\ b = r_1q_2 + r_2 & (0 < r_2 < r_1) \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 & (0 < r_3 < r_2) \\ r_2 = r_3q_4 + r_4 & (0 < r_4 < r_3) \end{array} \qquad (4)$$

Phép chia được tiếp tục cho đến khi một số dư bất kỳ trong các số dư r_1, r_2, r_3, ... bằng 0. Khi xem xét các bất đẳng thức viết ở bên phải, ta thấy rằng các số dư liên tiếp tìm được lập thành một dãy các số dương giảm dần:

$$b < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \ldots < 0. \qquad (5)$$

Rõ ràng rằng sau một số hữu hạn phép chia sẽ phải tìm được số dư 0. (cần thực hiện không quá b phép tính, nhưng thường ít hơn nhiều vì hiệu số giữa các r kề nhau thường lớn hơn đơn vị):

$$r_{n-2} = r_{n-1} + r_n,$$
$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0.$$

Nếu thế ta có thể kết luận rằng $(a, b) = r_n$. *Nói cách khác, ước số chung lớn nhất (a, b) bằng số dư cuối cùng trong dãy* (5). Điều này được suy ra từ sự áp dụng có lặp lại đẳng thức (3) vào hệ thức (4); thực vậy, từ những hệ thức đó suy ra:

$$(a, b) = (b, r_1), (b, r_1) = (r_1 r_2), (r_1 r_2) = (r_1 r_3),$$
$$(r_2, r_3) = (r_3, r_4), \ldots, (r_{n-1}, q_n r_n) = (r_n, 0) = r_n$$

Từ các đẳng thức (4) ta có thể rút ra một tính chất cực kỳ quan trọng của ước số chung lớn nhất (a, b): Nếu $d = (a, b)$ thì *có thể tìm những số dương và âm k và 1 sao cho* $d = ka + 1b$ (6)

Để khẳng định điều này, ta hãy xét các số dư liên tiếp (5). Cái thứ nhất trong các đẳng thức (4) cho ta:

$$r_1 = a - q_1 b$$

như vậy r_1 có thể viết dưới dạng $k_1 a + 1_1 b$ (trong trường hợp này thì $k_1 = 1$, $1_1 = -p_1$). Từ đẳng thức cuối cùng này, ta có:

$$r_2 = b - q_2 r_1 = b - q_2 (k_1 a + 1_1 b) =$$
$$= (-q_2 k_1) a + (1 - q_2 1_1) b = k_2 a + 1_2 b.$$

Tất nhiên có thể áp dụng lập luận như vậy đối với mọi số dư r_3, r_4, ..., cho đến khi đi tới biểu thức mà ta muốn tìm:

$$r_n = ka + 1b$$

Để làm thí dụ, ta hãy xét algôrit Ơclid trong việc tìm (61, 24); ước số chung lớn nhất là 1 và biểu thức mà ta chú ý đến của 1 thu được từ các đẳng thức:

$$61 = 2.24 + 3,\ 24 = 1.13 + 11,\ 13 = 1.11 + 2,$$
$$11 = 5.2 + 1,\ 2 = 2.1 + 0$$

Đẳng thức thứ nhất trong số này cho:

$$13 = 61 - 2.24$$

Đẳng thức thứ hai cho:

$$11 = 24 - 13 = 24 - (61 - 2.24) = -61 + 3.24$$

Đẳng thức thứ ba cho:

$$2 = 13 - 11 = (61 - 2.24) - (-61 + 3.23) =$$
$$= 2.61 - 5.24$$

và cuối cùng, đẳng thức thứ tư cho

$$1 = 11 - 5.2 = (-61 + 3.24) - 5(2.61 - 5.24) =$$
$$= -11.61 + 28.24$$

2. Áp dụng vào định lý cơ bản của số học

Sự kiện $d = (a, b)$ bao giờ cũng có thể viết dưới dạng $d = ka + lb$, cho phép ta đưa ra một chứng minh của định lý số học cơ bản, khác với chứng minh đã trình bày ở trang 52. Đầu tiên ta chứng minh một hệ quả làm bổ đề sau đó ta sẽ suy ra định lý. Bây giờ thì cách suy nghĩ ngược lại so với trước.

Bổ đề. Nếu tích ab chia hết cho số nguyên tố p thì hoặc a hoặc b chia hết cho p.

Giả thiết rằng a không chia hết cho p; như thế $(a, p) = 1$ vì p chỉ có hai ước số là p và 1. Trong trường hợp này có thể tìm được những số nguyên k và l sao cho:

$$1 = ka + lp$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức với b ta được:

$$b = kab + lpb$$

Vì ab chia hết cho p, nên có thể viết:

$$ab = pr,$$

và $$b = kpr + lpb = p(kr + lb)$$

và rõ ràng rằng b chia hết cho p. Bởi vậy, ta khẳng định rằng nếu ab chia hết cho p mà a không chia hết cho p thì b sẽ phải chia hết cho p; nghĩa là trong mọi trường hợp thì hoặc a, hoặc b chia hết cho p nếu ab chia hết cho p. Sự mở rộng cho trường hợp tích của ba hay nhiều thừa số không có khó khăn gì. Thí dụ,

nếu abc chia hết cho p thì áp dụng hai lần bổ đề ta kết luận được ít nhất một trong ba thừa số a, b, c chia hết cho p. Thực vậy, nếu p không chia hết cả a, b và c thì nó không chia hết ab và do đó không chia hết (ab) c = abc.

Từ kết quả vừa thu được suy ra ngay định lý cơ bản của số học. Giả thử có hai phân tích thành thừa số nguyên tố của số nguyên N :

$$N = P_1P_2 \dots P_r = q_1q_2q_3 \dots q_s$$

Vì P_1 chia hết vế trái của đẳng thức cho nên nó phải chia hết vế phải, tức là phải chia hết một trong các thừa số q_k. Nhưng q_k là số nguyên tố, vậy p_1 phải bằng q_k. Sau khi chia đẳng thức cho thừa số chung $P_1 = q_k$ thì cũng bằng cách như trên ta thấy rằng thừa số p_2 bằng một q_t nào đó. Rút gọn cho $p_2 = q_t$ rồi tiếp tục chuyển sang thừa số p_3 vv... Cuối cùng, tất cả các thừa số p được rút gọn nét và vế trái còn lại 1, Vì q là những số nguyên dương cho nên vế phải không thể còn lại gì ngoài số 1. Như vậy các số p và q bằng nhau từng đôi không kể thứ tự, tức hai phân tích là đồng nhất.

3. Hàm số Ơle φ(n). Một lần nữa nói về định lý Pheema. Ta nói rằng hai số nguyên a và b là nguyên tố cùng nhau nếu ước số chung lớn nhất của chúng bằng 1 :

$$(a,b) = 1$$

Thí dụ. các số 24 và 35 nguyên tố cùng nhau, nhưng các số 12 và 18 không nguyên tố cùng nhau.

Nếu a và b là các số nguyên tố cùng nhau thì có thể chọn được các số k và 1 sao cho :

$$ka + 1b = 1$$

Điều này được suy ra từ tính chất của (a,b) ở trang 88.

Giả sử n là số nguyên dương tùy ý; gọi $\varphi(n)$ là số những số nguyên tố cùng nhau với n trong phạm vi từ 1 đến n. Biểu thức $\varphi(n)$ do Ơle đưa ra đầu tiên là một hàm số rất quan trọng trong lý thuyết số. Dễ dàng tính được giá trị $\varphi(n)$ đối với một số giá trị đầu tiên của n:

$\varphi(1) = 1$ vì 1 nguyên tố cùng nhau với 1
$\varphi(2) = 1$ vì 1 nguyên tố cùng nhau với 2
$\varphi(3) = 2$ vì 1 và 2 nguyên tố cùng nhau với 3
$\varphi(4) = 2$ vì 1 và 3 nguyên tố cùng nhau với 4
$\varphi(5) = 4$ vì 1, 2, 3, 4, nguyên tố cùng nhau với 5
$\varphi(6) = 2$ vì 1, 5 nguyên tố cùng nhau với 6
$\varphi(7) = 6$ vì 1, 2, 3, 4, 5, 6 nguyên tố cùng nhau với 7
$\varphi(8) = 4$ vì 1, 3, 5, 7 nguyên tố cùng nhau với 8
$\varphi(9) = 6$ vì 1, 2, 4, 5, 7, 8 nguyên tố cùng nhau với 9
$\varphi(10) = 4$ vì 1, 3, 7, 9 nguyên tố cùng nhau với 10
vv...

Ta để ý rằng $\varphi(p) = p - 1$ nếu p là số nguyên tố; thực vậy số p không có ước số nào ngoài 1 và p, cho nên mọi số 1, 2,..., $p - 1$ là nguyên tố cùng nhau với p. Nếu n là hợp số mà phân tích thành thừa số nguyên tố có dạng

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

trong đó các số p biểu thị các thừa số nguyên tố khác nhau được nâng lên một lũy thừa nào đó thì

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Chẳng hạn, từ phân tích $12 = 2^2 . 3$ suy ra:

$$\varphi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 . \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = 4,$$

điều này có thể dễ dàng thử trực tiếp được. Chứng minh của định lý trên là hoàn toàn sơ cấp nhưng ta không trình bày ở đây.

4. Phân số liên tục. Phương trình Điôphăng Algôrit của Ơclid để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên còn dẫn đến một phương pháp quan trọng biểu thị tỷ số của hai số nguyên dưới dạng một phân số phức tạp có dạng đặc biệt.

Chẳng hạn, khi áp dụng vào các số 840 và 611, algôrit của Ơclid cho ta một dãy đẳng thức:

$$840 = 1.611 + 229,\ 611 = 2.229 + 153,$$
$$229 = 1.153 + 76,\quad 153 = 2.76 + 1$$

Những đẳng thức này chứng tỏ rằng (840, 611) = 1

Nhưng mặt khác, từ những đẳng thức đó ta thu được những đẳng thức sau đây:

$$\frac{840}{611} = 1 + \frac{229}{611} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{611}{229}}$$

$$\frac{611}{229} = 2 + \frac{153}{229} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{229}{153}}$$

$$\frac{229}{153} = 1 + \frac{76}{153} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{153}{76}}$$

$$\frac{153}{76} = 2 + \frac{1}{76}$$

Kết hợp các đẳng thức sau này với nhau, ta có phân tích sau đây của số $\frac{840}{611}$:

$$\frac{840}{611} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{76}}}}$$

Biểu thức dạng:

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

trong đó mọi số a là nguyên dương, được gọi là *phân số liên tục*. Algorit của Ơclid đã cho ta phương pháp biểu thị một số hữu tỷ tùy ý dưới dạng một phân số liên tục như vậy.

Phân số liên tục đóng vai trò quan trọng trong một ngành của số học cao cấp được gọi là giải tích Điôphăng. *Phương trình Điôphăng* là phương trình đại số có một hay nhiều ẩn số mà mọi hệ số đều là số nguyên và chỉ yêu cầu tìm các nghiệm nguyên của nó thôi. Một phương trình như vậy có thể hoàn toàn không có nghiệm hoặc có một số hữu hạn nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Phương trình Điôphăng đơn giản nhất là phương trình *tuyến tính* có hai ẩn:

$$ax + by = c \qquad (8)$$

trong đó a, b, c là các số nguyên cho trước. Cần phải tìm các nghiệm nguyên x và y. Có thể tìm được lời giải đầy đủ của các phương trình loại này nhờ algôrit Ơclid.

Trước hết, algôrit này giúp ta xác định $d = (a, b)$; sau đó, có thể chọn được các số nguyên k và 1 thỏa mãn đẳng thức:

$$ak + b1 = d \qquad (9)$$

Như vậy, trong trường hợp $c = d$ phương trình (8) có nghiệm riêng $x = k$, $y = 1$. Tổng quát, nếu c là bội của d ($c = d.\,q$) thì từ đẳng thức (9) ta suy ra:

$$a(kq) + b\,(1q) = dq = c$$

do đó trong trường hợp này phương trình (8) có nghiệm riêng $x = x^* = kq$, $y = y^* = lq$. Đảo lại, nếu phương trình (8) với c cho trước có một nghiệm x, y thì c phải là bội của $d = (a, b)$; thực vậy, d chia hết a và b, do đó d phải chia hết c. Như vậy, chúng ta đã chứng minh rằng phương trình (8) có (ít nhất một) nghiệm khi và chỉ khi c là bội của (a; b).

Bây giờ ta xét xem nếu biết một nghiệm $x = x^*$, $y = y^*$ của phương trình (8) thì làm thế nào để xác định được tất cả các nghiệm khác. Giả thử $x = x'$, $y = y'$ là một nghiệm tùy ý khác; như thế thì $x = x' - x^*$, $y = y' - y^*$ là nghiệm của phương trình đẳng cấp

$$ax + by = 0 \qquad (10)$$

Thực vậy, trừ các phương trình

$$ax' + by' = c \quad \text{và} \quad ax^* + by^* = c,$$

cho nhau, ta được:

$$a(x' - x^*) + b(y' - y^*) = 0$$

Bây giờ, để ý đến phương trình (10) ta thấy rằng nghiệm tổng quát của nó có dạng $x = \frac{rb}{(a, b)}$, $y = -\frac{ra}{(a, b)}$ trong đó r là số nguyên tùy ý (Đề nghị bạn đọc tự chứng minh điều này để luyện tập). Sau đó ta sẽ được nghiệm tổng quát của phương trình (8):

$$x = x^* + \frac{rb}{(a,b)}, \quad y = y^* - \frac{ra}{(a,b)}$$

Ta đi đến kết luận: phương trình Điôphăng tuyến tính $ax + by = c$ trong đó a, b và c là các số nguyên, có nghiệm nguyên khi và chỉ khi c là bội của (a, b). Trong trường hợp này, ta tìm được nghiệm riêng $x = x^*$, $y = y^*$ nhờ algôrit Ơclid, còn nghiệm tổng quát có dạng là:

$$x = x + \frac{rb}{(a,b)}, \quad y = y^* - \frac{ra}{(a,b)}$$

trong đó r là số nguyên tùy ý.

Thí dụ: Phương trình $3x + 6y = 22$ không có nghiệm nguyên vì $(3, 6) = 3$ không chia hết 22.

Phương trình $7x + 11y = 13$ có nghiệm riêng $x = -39$, $y = 26$ được tìm ra nhờ các tính toán sau đây:

$$11 = 1.7 + 4,\ 7 = 1.4 + 3,\ 4 = 1.3 + 1,\ (7,11) = 1.$$

$$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2.4 - 7 = 2(11 - 7) - 7 = 2.11 - 3.7.$$

Từ đó suy ra:

$$7.(-3) + 11.(2) = 1.$$

$$7.(-39) + 11.(26) = 13.$$

Những nghiệm còn lại được cho bằng các công thức:

$$x = -39 + 11r, y = 27 - 7r$$

trong đó r là số nguyên tùy ý.

CHƯƠNG II

HỆ THỐNG SỐ TOÁN HỌC

MỞ ĐẦU

Về sau này ta phải mở rộng khái niệm số ở một mức độ rất cao bắt đầu từ dãy số tự nhiên, nhằm xây dựng một công cụ mạnh mẽ nhằm thỏa mãn nhu cầu của cả thực tiễn và lý thuyết. Về mặt lịch sử, trong quá trình tiến hóa lâu dài và chập chững, số 0, số nguyên âm và phân số hữu tỷ đã dần dần có quyền bình đẳng với các số trong dãy số tự nhiên. Ngày nay một học sinh trung bình cũng đã nắm vững được qui tắc của các phép tính đối với tất cả những số đó. Nhưng muốn nắm được

hoàn toàn các phép toán đại số thì cần phải đi xa hơn nữa và cần nắm vững được khái niệm mở rộng của số hữu tỷ và số phức. Mặc dầu những sự mở rộng đó của khái niệm về số đã có cách đây hơn một thế kỷ và toàn bộ toán học hiện đại đã dựa vào chúng làm cơ sở, nhưng nền móng logic vững chắc của chúng cũng mới chỉ có cách đây không lâu. Trong chương này chúng ta sẽ phác ra những thời kỳ cơ bản của sự phát triển đó.

§1. SỐ HỮU TỈ

1. Số hữu tỷ là phương tiện của phép đo. Số tự nhiên nảy sinh do sự trừu tượng hóa trong quá trình đếm các sự vật trong những tập hợp hữu hạn. Nhưng trong đời sống hàng ngày không những ta chỉ *đếm* các sự vật tách rời nhau mà còn phải *đo các đại lượng*, chẳng hạn như độ dài, diện tích, trọng lượng, thời gian. Nếu ta muốn làm toán với các kết quả của phép đo các đại lượng có thể chia thành vô hạn phần nhỏ như vậy thì không thể giới hạn trong phạm vi dãy số tự nhiên mà phải mở rộng giới hạn của số học ra một thế giới mới của các số. Bước đầu tiên là qui vấn đề đo về vấn đề đếm. Trước hết ta chọn một cách hoàn toàn tùy ý một *đơn vị đo* — fut(1), acto(2), inso(3), funt(4), gam — tùy theo từng trường hợp. Rồi ta đếm số các đơn vị như vậy có trong đại lượng cần đo. Có thể xảy ra trường hợp miếng kẽm nặng đúng bằng 54 funt. Nhưng trong trường hợp tổng quát thì quá trình đếm thường « không hội tụ »: đại lượng đã cho không thể đo được tuyệt đối

---

(1) Đơn vị dài bằng 30,5cm
(2) Đơn vị dài bằng 91,44cm
(3) Đơn vị dài bằng 2,5cm
(4) Đơn vị khối lượng bằng 409,5 gam

chính xác bằng các đơn vị đã chọn, không phải là bội của nó. Trong trường hợp này ta chỉ có thể nói rằng đại lượng đó bao hàm giữa hai bội số liên tiếp của đơn vị đó, ta giả thử rằng giữa 53 và 54 funt. Nếu vậy, ta đưa vào những đơn vị mới bằng đơn vị ban đầu chia ra làm n phần bằng nhau. Về mặt ngôn ngữ, những đơn vị nhỏ mới này có những tên gọi khác: chẳng hạn, fut chia thành 12 insơ, mét chia thành 100 centimet, funt chia thành 16 ônxơ, giờ thành 60 phút, phút thành 60 giây v.v... Song, trong ký hiệu toán học tổng quát thì một đơn vị nhỏ tạo ra được khi chia đơn vị ban đầu ra n phần sẽ được biểu thị bằng ký hiệu $\frac{1}{n}$. Nếu đại lượng đang xét chứa đúng m đơn vị nhỏ đó thì số đo của nó là $\frac{m}{n}$. Ký hiệu này được gọi là phân số hoặc *tỉ số* (còn viết là m : n). Bước cuối cùng và quan trọng nhất đã được thực hiện một cách có ý thức sau nhiều thế kỷ tập hợp những cố gắng riêng rẽ là: ký hiệu $\frac{m}{n}$ đã thoát khỏi mối liên hệ cụ thể với quá trình đo và được xem như một *hư số* có bản chất độc lập, bình đẳng với số tự nhiên. Nếu m và n là các số tự nhiên thì ký hiệu $\frac{m}{n}$ được gọi là số *hữu tỉ*.

Việc dùng thuật ngữ « số » (lúc đầu ta hiểu « số » chỉ là số tự nhiên) là thích hợp đối với các ký hiệu mới vì phép cộng và phép nhân đối với những ký hiệu này cũng có những qui luật giống như những phép toán tương ứng đối với các số tự nhiên. Muốn xác nhận điều này, trước hết phải định nghĩa phép cộng và phép nhân

các số hữu tỉ và định nghĩa số hữu tỉ bằng nhau. Những định nghĩa đó, như ta đã biết, là như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}, \quad \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \\ \dfrac{a}{a} = 1, \quad \dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó a, b, c, d là những số tự nhiên tùy ý.

Thí dụ:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2.5 + 4.3}{3.5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15},$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2.4}{3.5} = \frac{8}{15}, \quad \frac{3}{3} = 1, \quad \frac{8}{12} = \frac{2.4}{3.4} = \frac{2}{3}$$

Ta *buộc phải* thừa nhận những định nghĩa đó nếu ta nghĩ đến việc dùng các số hữu tỷ để đo chiều dài, diện tích v.v... Nhưng với quan điểm logic chặt chẽ hơn thì những qui tắc cộng và nhân và việc giải thích như vậy về sự bằng nhau của những ký hiệu mới được xác lập một cách độc lập về định nghĩa, không chịu một điều kiện nào khác ngoài sự tương thích lẫn nhau (tính phi mâu thuẫn) và sự tiện lợi đối với những ứng dụng thực tiễn. Xuất phát từ các định nghĩa (1) có thể chứng tỏ rằng *những định luật cơ bản của số học các số tự nhiên vẫn tiếp tục được bảo toàn trong phạm vi số hữu tỷ:*

$p + q = q + p$ (định luật giao hoán của phép cộng)

$p + (q + r) = (p + q) + r$ (định luật kết hợp của phép cộng)

$pq = qp$ (định luật giao hoán của phép nhân),

$p(qr) = (pq)r$ (định luật kết hợp của phép nhân)

$p(q + r) = pq + pr$ (định luật phân phối).

Chẳng hạn việc chứng minh định luật giao hoán của phép cộng phân số được thể hiện qua những đẳng thức sau đây:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

ở đây đẳng thức đầu tiên và đẳng thức cuối cùng được xác định bởi định nghĩa phép cộng [1] còn đẳng thức ở giữa là hệ quả của các định luật giao hoán của phép cộng và phép nhân các số tự nhiên. Bằng cách này bạn đọc có thể kiểm tra bốn định luật còn lại nếu thấy cần thiết.

2. Sự nảy sinh nhu cầu về số hữu tỷ bên trong bản thân toán học. Nguyên lý suy rộng. Độc lập đối với cơ sở « thực tiễn » của việc đưa vào số hữu tỉ còn có một cơ sở sâu sắc hơn và mang tính chất bắt buộc hơn. Ở đây, ta sẽ xét khía cạnh đó của vấn đề một cách hoàn toàn độc lập với những lập luận đã nêu ở trên. Trong số học tự nhiên thông thường, ta luôn luôn thực hiện được các phép toán *thuận* cơ bản: phép cộng và phép nhân. Nhưng các phép toán *ngược* — phép trừ và phép chia thì không phải bao giờ cũng thực hiện được. Hiệu $b - a$ của hai số tự nhiên a và b, theo định nghĩa, là một số tự nhiên c sao cho $a + c = b$, tức là nghiệm của phương trình $a + x = b$. Nhưng, trong phạm vi số tự nhiên thì ký hiệu $b - a$ chỉ có nghĩa khi $b > a$, bởi vì chỉ trong điều kiện đó thì phương trình $a + x = b$ mới có nghiệm. Khi đưa ký hiệu 0 vào để biểu thị $a - a$, ta đã có một bước tiến quan trọng trên con đường xóa bỏ giới hạn đó. Nhưng việc đưa vào ký hiệu $-1, -2; -3...$ cùng với định nghĩa $(b - a) = -(a - b)$ đối với trường hợp $b < a$, còn là một thành công quan trọng hơn, sau đó đã có thể khẳng định rằng phép trừ là thực hiện được vô hạn trong *phạm vi số nguyên* —

số dương và số âm. Khi đưa vào các ký hiệu mới — 1, — 2, — 3... tức là mở rộng phạm vi số; thì tất nhiên chúng ta phải *định nghĩa* các phép toán với những số mới đưa vào sao cho *những qui tắc ban đầu của các phép toán số học không bị xóa bỏ.* Chẳng hạn qui tắc:

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \qquad (3)$$

là cơ sở cho phép nhân các số âm, được hình thành do ý định bảo toàn định luật phân phối $a(b+c) = ab + ac$. Thực vậy nếu, chẳng hạn ta cho rằng $(-1) \cdot (-1) = -1$ thì khi đặt $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ ta có $-1\ (1-1) = -1 - 1 = -2$ nhưng thực ra thì $-1(1-1) = -1.0 = 0$.

Phải mất không ít thời gian để các nhà toán học nhận thức được rõ rằng « qui tắc của các ký hiệu » (3) và mọi định nghĩa khác thuộc về các số âm cũng như các phân số là không thể « chứng minh được ». Chúng được hình thành với mục đích bảo đảm thực hiện được phép toán mà không xóa bỏ những định luật số học cơ bản. Cái có thể và phải chứng minh để cho các định nghĩa đó được thừa nhận chính là bảo toàn định luật cơ bản của số học: định luật giao hoán, kết hợp và phân phối. Chính Ơle vĩ đại đã dùng một chứng cớ hoàn toàn chưa có tính chất thuyết phục để chứng tỏ rằng $(-1) \cdot (-1)$ « phải » bằng $+1$. Ông nói: « Tích số đang xét chỉ có thể bằng $+1$ hoặc -1; nhưng không thể bằng (-1) bởi vì $-1 = (+1)\ (-1)$ »

Việc đưa phân số vào để xóa bỏ những trở ngại trong khi thực hiện phép chia cũng hoàn toàn tương tự như việc đưa số 0 và các số nguyên âm vào để chuẩn bị cho sự thực hiện không giới hạn của phép trừ. Tỉ số hoặc thương số $x = \frac{a}{b}$ của hai số nguyên là nghiệm số của phương trình:

$$ax = b \qquad (4)$$

Tỉ số đó là *số nguyên* chỉ khi a là ước số của b. Nhưng nếu điều đó không xảy ra (chẳng hạn khi a = 2 ; b = 3), ta sẽ đưa vào một ký hiệu mới $\frac{b}{a}$ gọi là phân số thỏa mãn điều kiện biểu thị bởi đẳng thức $a.\frac{b}{a} = b$, tức $\frac{b}{a}$ là nghiệm của (4) « theo định nghĩa ». Sự sáng tạo ra phân số với tư cách là những ký hiệu mới về số đã bảo đảm cho sự thực hiện không có giới hạn của phép chia, *trừ phép chia cho 0*. Các biểu thức 1/0, 3/0, 0/0, v.v... là những ký hiệu vô nghĩa đối với chúng ta. Nếu như thừa nhận phép chia cho 0 thì từ đẳng thức đúng 0 . 1 = 0 . 2 sẽ suy ra một hệ quả sai 1 = 2. Có khi ta biểu thị những biểu thức đó bằng ký hiệu « vô hạn », nhưng với điều kiện không được xử lý ký hiệu này như là nó đã tuân theo các định luật số học thông thường.

Bây giờ thì ta đã rõ những nguyên tắc xây dựng hệ thống *tất cả các số hữu tỷ* — số nguyên và phân số, số dương và số âm. Trong phạm vi mở rộng đó thì không những các định luật hình thức — định luật kết hợp, giao hoán và phân phối — là đúng, mà các phương trình $a + x = b$ và $ax = b$ luôn có nghiệm duy nhất $x = b - a$ và $x = \frac{b}{a} (a \neq 0)$. Nói cách khác, trong phạm vi số hữu tỷ, *các phép toán hữu tỷ* — phép cộng — trừ, nhân và chia — được thực hiện không giới hạn và không vượt ra ngoài phạm vi đó. Những phạm vi số đóng kín như vậy được gọi là những *trường số*. Ta sẽ gặp lại những thí dụ về trường số sau này, ở chương này và chương III.

Sự mở rộng phạm vi bằng cách đưa ra những ký hiệu mới được tiến hành sao cho các định luật của phạm vi

bả, đầu vẫn còn được bảo toàn trong phạm vi đã mở rộng. Đó là một thí dụ điển hình của *nguyên lý suy rộng*.

Sự mở rộng từ số tự nhiên đến số hữu tỉ không những thỏa mãn được nhu cầu loại trừ tính giới hạn của việc thực hiện các phép tính trừ và chia, mà còn thỏa mãn được nhu cầu thực tiễn về ghi lại kết quả đo đạc một cách thuận tiện. Chính sự kiện số hữu tỷ thỏa mãn đồng thời những nhu cầu về thực tiễn và lý thuyết đã làm cho chúng có tầm quan trọng đặc biệt. Ta nhận thấy việc mở rộng khái niệm về số được thực hiện bằng cách đưa vào những ký hiệu mới và trừu tượng như 0, —2, hoặc 3/4. Ngày nay, chúng ta xử lý những ký hiệu đó một cách thông thạo và tự tin mà không cần nghĩ đến bản chất của chúng. Và cũng khó mà tưởng tượng được rằng trong thế kỷ XVII, chúng còn được rất ít tín nhiệm so với số tự nhiên, nếu như chúng được sử dụng thì với mức độ hoài nghi rất lớn. Bản chất cố hữu của ý thức con người có xu hướng bám vào «cái cụ thể» được thể hiện trong dãy số tự nhiên, là nguyên nhân gây ra tính chậm trễ của quá trình tiến hóa tất yếu. Chắc chắn có thể xây dựng một hệ thống số học hoàn hảo về lôgic bằng sự trừu xuất cái thực tại.

3. **Biểu diễn hình học các số hữu tỷ.** Có thể thu được một biểu diễn hình học hệ thống số hữu tỷ bằng cách như sau:

Trên một đường thẳng nào đó (trục số) ta đánh dấu một đoạn thẳng từ 0 đến 1 (hình 8). Nói chung, có thể chọn một cách tùy ý, độ dài đoạn thẳng đơn



H. 8. Trục số

vị. Các số nguyên dương và âm được biểu diễn bởi tập hợp những điểm cách đều nhau trên trục số, các số dương được ghi ở bên phải, các số âm được ghi ở bên trái điểm 0. Muốn biểu diễn các số có mẫu số n, ta chia mỗi đoạn có độ dài đơn vị ra n phần bằng nhau, các điểm chia biểu thị các phân số có mẫu số n. Nếu ta làm như thế với những giá trị n tương ứng với mọi số tự nhiên, thì mỗi số hữu tỉ sẽ được biểu diễn bởi một điểm nào đó của trục số. Ta qui ước gọi những điểm đó là những « điểm hữu tỉ », nói chung thì các thuật ngữ « số hữu tỉ » và « điểm hữu tỉ » được coi là đồng nghĩa. Quan hệ bất đẳng thức $A < B$ đối với số tự nhiên đã được định nghĩa trong §1, chương I. Quan hệ đó được thể hiện trên trục số như sau: nếu số tự nhiên A nhỏ hơn số tự nhiên B thì điểm A ở bên trái điểm B. Vì quan hệ hình học nêu trên được thiết lập cho *mọi cặp* điểm hữu tỉ, cho nên tất nhiên ta phải mở rộng quan hệ bất đẳng thức số học để bảo toàn thứ tự hình học đó đối với các điểm đang xét. Điều này có thể đạt được, nếu thừa nhận định nghĩa sau đây: ta nói rằng số hữu tỉ A *nhỏ hơn* số hữu tỉ B ($A < B$) hoặc B *lớn hơn* số A ($B > A$) nếu hiệu $B - A$ dương. Do đó, những điểm (số) ở *giữa* A và B (nếu $A < B$) là những điểm đồng thời $> A$ và $< B$. Mỗi cặp điểm A và B như vậy cùng với mọi điểm ở giữa chúng được gọi là *một đoạn* và được ký hiệu là $[A, B]$, còn tập hợp chỉ gồm những điểm ở bên trong được gọi là *một khoảng* và được ký hiệu là (A, B).

Khoảng cách từ một điểm A bất kỳ đến gốc 0 được xem như một số dương và được gọi là *giá trị tuyệt đối* của B với ký hiệu là $|A|$.

Khái niệm « giá trị tuyệt đối » được định nghĩa như sau: nếu $A \geq 0$ thì $|A| = A$, nếu $A < 0$ thì $|A| = -A$. Rõ ràng nếu A và B cùng dấu thì có đẳng thức

$|A+B| = |A| + |B|$, nếu, A và B là khác dấu thì $|A+B| < |A| + |B|$. Kết hợp hai bất đẳng thức đó với nhau ta có bất đẳng thức:

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|,$$

đúng với mọi A và B.

Sự kiện có tầm quan trọng nền tảng được biểu thị bằng mệnh đề (định lý) sau đây: *các điểm hữu tỉ là trù mật khắp nơi trên trục số.* Ý nghĩa của khẳng định này là, trong một khoảng bất kỳ dù nhỏ đến đâu cũng có những điểm hữu tỉ. Muốn chứng minh sự đúng đắn của khẳng định vừa nêu, chỉ cần lấy một số n đủ lớn sao cho khoảng (1, 1/n) nhỏ hơn một khoảng (A, B) cho trước, khi đó, có ít nhất một trong những điểm có dạng m/n nằm trong khoảng đã cho. Như vậy, không tồn tại một khoảng nào trên trục số (ngay cả khoảng nhỏ nhất mà ta có thể biểu diễn được) mà bên trong nó không có điểm hữu tỉ nào cả. Từ đó, suy ra hệ quả sau: mọi khoảng đều chứa một tập hợp vô hạn điểm hữu tỉ. Thực vậy, nếu một khoảng nào đó chỉ chứa một số hữu hạn số hữu tỉ thì, bên trong khoảng tạo bởi hai điểm hữu tỉ kề nhau như thế sẽ không có một điểm hữu tỉ nào cả — điều này mâu thuẫn với sự kiện vừa được chứng minh ở trên.

§ 2. ĐOẠN THẲNG VÔ ƯỚC — SỐ VÔ TỈ — GIỚI HẠN

1. Mở đầu. Khi so sánh độ dài hai đoạn thẳng a và b có thể xảy ra trường hợp a được chứa trong b đúng một số nguyên r lần. Trong trường hợp này độ dài của đoạn b được biểu thị qua độ dài đoạn a rất đơn giản: độ dài b gấp r lần độ dài a. Có thể xảy ra trường hợp

không tồn tại số nguyên r có tính chất như trên, lúc này, nếu chia đoạn thẳng a thành một số phần bằng nhau nào đó, chẳng hạn n phần bằng nhau (mỗi đoạn dài a/n), rồi lấy một số nguyên m lần các phần đó thì được đúng đoạn thẳng b:

$$b = \frac{m}{n} \cdot a \qquad (1)$$

Nếu có hệ thức (1) thì ta nói rằng hai đoạn a và b *thông ước với nhau* vì chúng có « một độ đo chung »: đó là đoạn thẳng có độ dài a/n được chứa trong đoạn thẳng a đúng n lần, được chứa trong đoạn thẳng b đúng m lần. Một đoạn thẳng b nào đó là thông ước hoặc vô ước với đoạn thẳng a tùy thuộc ở chỗ chọn được hay không hai số tự nhiên m và n ($n \neq 0$) sao cho có đẳng thức (1). Để ý đến h.9; giả thử ta chọn đoạn thẳng đơn vị (0, 1) làm đoạn thẳng a và xét tất cả những đoạn thẳng có thể có được mà một đầu mút trùng với 0. Lúc này, chỉ những đoạn thẳng có đầu mút thứ hai trùng với một điểm hữu tỉ m/n nào đó là thông ước với đoạn thẳng đơn vị mà thôi.

Trong thực tiễn đo đạc thì số hữu tỉ là hoàn toàn đủ dùng. Vì các điểm hữu tỉ là trù mật khắp nơi, do đó về mặt lý thuyết có thể cho rằng mọi điểm trên trục số là điểm hữu tỉ được không. Nếu thế thì mọi đoạn thẳng đều thông ước với đoạn thẳng đơn vị. Nhưng vấn đề không đơn giản như vậy. Sự xác nhận tình trạng này là một trong những phát minh sáng chói nhất trong toán học ngay từ thời cổ đại (trong trường phái Pitago): *Tồn tại những đoạn thẳng vô ước* với nhau hoặc nói cách khác, (nếu giả thiết rằng mỗi đoạn thẳng đều tương ứng với một số nào đó biểu thị cho độ dài của nó) *tồn tại những số vô tỉ*. Việc ý thức được sự kiện

khoa học có tầm quan trọng lớn lao nhất này mới chỉ là linh cảm. Nó là cơ sở cho cái mà ngày nay chúng ta coi là một phương pháp toán học chặt chẽ và được xem như một cống hiến của các nhà toán học Hy lạp cho khoa học. Không còn nghi ngờ gì nữa, phát minh tuyệt vời này đã ảnh hưởng sâu sắc đến toàn bộ toán học và ngay cả triết học từ xưa đến nay.

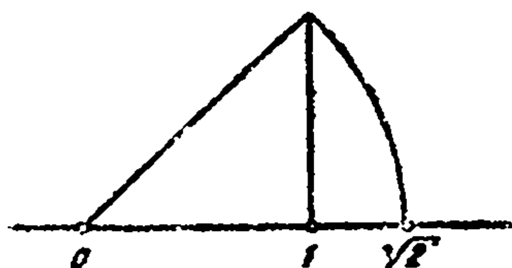


H. 9. Các điểm hữu tỉ

Lý thuyết các đại lượng vô ước, được trình bày dưới hình thức hình học trong « Khởi đầu » của Ơclid, là một thành tựu tinh vi nhất của toán học Hylạp (nó thường được trình bày qua những mẩu chuyện kể của Ơclid dùng để giảng dạy ở nhà trường). Mãi đến cuối thế kỷ XX sau những cố gắng của Đêđêkin và Vaiơstrax nhằm tạo nên lý thuyết số vô tỉ chặt chẽ thì lý thuyết này mới được đánh giá cao tương xứng với nó. Sau này ta sẽ trình bày lý thuyết đó trên quan điểm của số học hiện đại.

Trước hết, ta xác nhận rằng: *Mỗi đường chéo hình vuông vô ước với cạnh của nó*. Giả thử cạnh hình vuông được chọn làm đơn vị dài. Ta biểu thị độ dài đường chéo của nó là x. Theo định lý Pitago, ta có:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$



H. 10. Cách dựng số $\sqrt{2}$

(Số x như thế được ký hiệu là $\sqrt{2}$). Nếu x thông ước với đơn vị thì có thể tìm được hai số nguyên p và q sao cho $x = p/q$ và ta có đẳng thức

$$p^2 = 2q^2 \qquad (2)$$

Có thể giả thiết rằng phân số p/q là tối giản; nếu không thế thì ngay từ đầu ta ước lược cho ước số chung lớn nhất của p và q. Vế phải có thừa số 2 cho nên p^2 là số chẵn, tức p cũng là số chẵn, bởi vì bình phương của số lẻ cũng là số lẻ. Bây giờ, có thể đặt $p = 2r$. Khi đó đẳng thức (2) sẽ có dạng:

$$4r^2 = 2p^2 \text{ hay } 2r^2 = p^2$$

Vì vế trái có thừa số 2 cho nên q^2 chẵn và do đó q cũng chẵn. Như vậy, p và q là các số chẵn, tức là chúng chia hết cho 2, điều này mâu thuẫn với giả thiết phân số $\frac{p}{q}$ tối giản. Như vậy không thể có đẳng thức (2) và x không thể là số hữu tỉ.

Có thể phát biểu kết quả này một cách khác: $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Lập luận vừa nêu chứng tỏ rằng một phép dựng hình học đơn giản nhất sẽ dẫn tới một đoạn thẳng vô ước với đơn vị. Nếu một đoạn thẳng như vậy được đặt bằng compa từ điểm 0 trên trục số thì điểm dựng được (điểm mút cuối của đoạn thẳng) sẽ không trùng với một số hữu tỉ nào. Như vậy hệ thống *các điểm hữu tỉ* (dù rằng trù mật khắp nơi) vẫn *không phủ toàn bộ trục số*. Tất nhiên, một tập hợp điểm hữu tỉ trù mật khắp nơi mà không phủ được toàn bộ đường thẳng thì thật là lạ lùng và kỳ dị đối với sự nhận thức ngây thơ. Không có một «trực giác» nào giúp ta «thấy được» các điểm vô tỉ và phân biệt chúng với các điểm hữu tỉ. Không lấy gì làm lạ rằng sự phát hiện ra đoạn thẳng vô ước đã

làm xôn xao các nhà toán học và các nhà tư tưởng Hy lạp. Sự tồn tại đoạn thẳng vô ước cho đến nay vẫn còn gây ấn tượng mạnh mẽ cho những người có xu hướng suy tưởng sâu sắc. Việc dựng theo ý muốn một số tùy ý đoạn thẳng vô ước với đơn vị là không có gì khó khăn. Điểm mút của tất cả các đoạn thẳng như vậy — với điều kiện điểm đầu của chúng phải trùng với điểm 0 — sẽ tạo thành một tập hợp các điểm vô tỉ. Lưu ý rằng khi đưa số hữu tỉ vào, ta có một nguyên tắc chủ đạo là: *bảo đảm đo được độ dài các đoạn thẳng bằng các số*, và nguyên tắc này vẫn tiếp tục chỉ đạo chúng ta khi xét đến các đoạn thẳng vô ước. Nếu ta muốn có một tương ứng hai chiều giữa một bên là các số và một bên là các điểm trên trục số thì không thể tránh khỏi phải đưa *số vô tỉ* vào.

Để tóm lại những điều đã nói cho đến bây giờ, ta kết luận rằng số vô tỉ biểu thị cho độ dài của đoạn thẳng vô ước với đơn vị. Trong các mục sau, ta sẽ phải chính xác hóa một vài định nghĩa thuần túy hình học còn mơ hồ để đi đến một định nghĩa thỏa mãn quan điểm logic chặt chẽ. Khi xem xét vấn đề này ta sẽ bắt đầu từ các phân số thập phân.

2. Phân số thập phân hữu hạn và vô hạn. Muốn phủ trục số bằng một tập hợp điểm trù mật khắp nơi thì không cần phải dùng đến *toàn bộ* tập hợp số hữu tỉ: chẳng hạn, chỉ cần dùng những số hình thành nên do chia đoạn thẳng đơn vị thành 10, 100, 1000 v.v... phần bằng nhau. Các điểm chia thu được sẽ tương ứng với « các phân số thập phân ». Thí dụ: $0{,}12 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ tương ứng với điểm nằm ở trong khoảng đơn vị đầu tiên, ở trong « phân khoảng » thứ hai dài 10^{-1}, cụ thể là điểm đầu của « phân khoảng con » thứ ba dài 10^{-2}

(a^{-n} nghĩa là $\frac{1}{a^n}$). Nếu *phân số thập phân* loại này chứa n số sau dấu phẩy thì nó có dạng:

$$f = z + a_1 . 10^{-1} + a_2 . 10^{-2} + a_3 . 10^{-3} + \dots + a_n . 10^{-n},$$

trong đó z là số nguyên, còn các hệ số a là các chữ số 0, 1, 2, ..., 9 biểu thị số phần mười, số phần trăm v.v... Số f được viết gọn trong hệ thập phân như sau: z, a_1 a_2 a_3 ... a_n. Ta thấy ngay rằng các phân số thập phân loại này có thể biểu thị được dưới dạng phân số thường $\frac{p}{q}$, trong đó $q = 10^n$; thí dụ:

$$f = 1{,}314 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} = \frac{1314}{1000}$$

Nếu p và q có thừa số chung thì có thể rút gọn phân số đi, lúc này mẫu số sẽ là một ước số nào đó của 10^n. Mặt khác, một phân số tối giản mà mẫu số không phải là ước số của lũy thừa của 10 thì không thể viết dưới dạng phân số thập phân thuộc loại nói ở trên. Thí dụ, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$, $\frac{1}{250} = \frac{4}{1000} = 0{,}004$; nhưng $\frac{1}{3}$ không thể viết thành phân số lẻ thập phân, với một số hữu hạn số lẻ thập phân, dù n lớn đến đâu. Thực vậy, từ đẳng thức:

$$\frac{1}{3} = \frac{b}{10^n}$$

suy ra: $10^n = 3b$.

Không thể có đẳng thức cuối này vì 3 không phải là thừa số của bất cứ lũy thừa nào của 10.

Bây giờ ta lấy một điểm P tùy ý trên trục số không tương ứng với một phân số thập phân hữu hạn nào cả; chẳng hạn, có thể lấy điểm hữu tỉ $\frac{1}{3}$ hoặc điểm

vô tỉ $\sqrt{2}$. Như vậy, điểm P không bao giờ là điểm chia trong quá trình phân chia liên tiếp đoạn thẳng đơn vị thành 10 phần bằng nhau: nó sẽ nằm bên trong các khoảng thập phân mà độ dài của các đoạn này giảm đi vô hạn; các mút của những khoảng này tương ứng với những phân số thập phân hữu hạn và dẫn tới điểm P với độ chính xác tùy ý. Ta hãy xét tỉ mỉ hơn quá trình xấp xỉ này.

Giả thiết rằng điểm P nằm trong khoảng đơn vị thứ nhất. Phân khoảng đó ra 10 phần bằng nhau mỗi phần dài 10^{-1} và giả thiết rằng điểm P rơi vào trong khoảng thứ ba chẳng hạn. Lúc này, ta có thể khẳng định rằng P bao hàm giữa các phân số thập phân 0,2 và 0,3. Ta tiếp tục chia khoảng từ 0,2 đến 0,3 ra 10 phần bằng nhau mỗi phần dài 10^{-2} và thấy rằng P rơi vào trong khoảng thứ tư chẳng hạn. Lại chia khoảng này ra 10 phần bằng nhau, ta thấy rằng điểm P rơi vào trong khoảng thứ nhất chẳng hạn có độ dài 10^{-3}. Bây giờ có thể nói rằng điểm P bao hàm giữa 0,230 và 0,231. Quá trình này có thể kéo dài vô hạn và dẫn đến một dãy vô hạn các chữ số a_1, a_2 ... , a_n, ... có tính chất như sau: điểm P nằm trong khoảng I_n mà điểm mút đầu là $0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$, điểm mút cuối là $0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} (a_n + 1)$ và độ dài I_n bằng 10^{-n}. Nếu xếp theo thứ tự $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$, ta thấy rằng mỗi khoảng I_1, I_2, I_3, ... nằm trong khoảng đứng trước nó, độ dài của những khoảng ấy là 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ... giảm đi vô hạn. Ta nói vắn tắt hơn là: điểm P nằm trong *một dãy các khoảng thập phân thắt lại.* Thí dụ, nếu điểm P là $\frac{1}{3}$ thì mọi chữ số a_1, a_2, a_3, ... bằng 3 và P nằm trong một khoảng I_n tùy ý từ 0,333 ... 33 đến 0,333 ... 34, tức là $\frac{1}{3}$

lớn hơn 0,333 ... 333 và nhỏ hơn 0,333 ... 34 với số chữ số tùy ý sau dấu phẩy. Trong trường hợp này ta nói rằng phân số thập phân n chữ số 0,333 ... 33 « dần tới $\frac{1}{3}$ » khi số chữ số n tăng lên vô hạn. Ta qui ước viết

là : $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, các dấu chấm có nghĩa là phân số

thập phân có thể kéo dài « đến vô hạn ». Điểm vô tỉ $\sqrt{2}$ được xét xét ở mục 1 cũng dẫn đến một phân số thập phân vô hạn. Nhưng trong trường hợp này thì qui luật của các chữ số liên tiếp trong dạng thập phân đó đã không rõ ràng. Khó mà chỉ ra một công thức cho ta chữ số đứng ở vị trí thứ n mặc dầu có thể tính được tùy ý bao nhiêu chữ số :

$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$
$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2 < (1{,}5)^2 = 2{,}25$
$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2 < (1{,}42)^2 = 2{,}0264$
$(1{,}414)^2 = 1{,}999396 < 2 < (1{,}415)^2 = 2{,}002225$
$(1{,}4142)^2 = 1{,}99996164 < 2 < (1{,}4153) = 2{,}00024449$
v.v ...

Để định nghĩa tổng quát, ta nói rằng một điểm P không biểu diễn được dưới dạng một phân số thập phân với một số hữu hạn các chữ số thập phân sẽ được biểu diễn dưới dạng một phân số thập phân tuần hoàn $z, a_1 a_2 a_3 \ldots$, nếu điểm ấy nằm trong khoảng có độ dài 10^{-n} với điểm nút đầu là $z, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$.

Như vậy, ta đã thiết lập sự tương ứng giữa tất cả các điểm của trục số và tất cả các phân số thập phân (hữu hạn và vô hạn). Bây giờ ta đưa ra một định nghĩa mở đầu : *« số » là phân số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn.* Những phân số thập phân vô hạn không biểu thị cho số hữu tỉ được gọi là những số vô tỉ. Cho đến giữa

thế kỷ XIX những lý giải tương tự như những lý giải đã nêu trên vẫn được coi là đủ để giải thích cách xây dựng hệ thống số hữu tỉ và vô tỉ — *Continum số*. Những thành tựu phi thường của toán học bắt đầu từ thế kỷ XVII, đặc biệt sự phát triển của hình học giải tích và phép tính vi tích phân, đã dựa hẳn trên quan niệm như thế về hệ thống số. Tuy nhiên khi xem xét lại một cách có phê phán các nguyên tắc và củng cố lại các kết quả, người ta cảm thấy ngày càng rõ ràng cần phải phân tích chính xác và sâu sắc hơn khái niệm số vô tỉ. Nhưng, trước khi phác họa lý thuyết continum số hiện đại, ta cần xem xét và làm rõ – một phần nào đó dựa trên cơ sở trực giác — một trong những khái niệm toán học cơ bản — khái niệm giới hạn.

3. Giới hạn. Cấp số nhân vô hạn. Như đã biết trong mục trước, có khi một số hữu tỉ s nào đó được xấp xỉ bằng một dãy các số hữu tỉ khác s_n, trong đó chỉ số n nhận liên tiếp tất cả các giá trị 1, 2, 3... Chẳng hạn có thể lấy : s = 1/3, trong đó $s_1 = 0,3$, $S_2 = 0,33$, $s_3 = 0,333$ v.v... Một thí dụ nữa, ta chia khoảng đơn vị ra hai phần bằng nhau, rồi lại chia nửa thứ hai thành hai phần bằng nhau, rồi lại chia khoảng thứ hai vừa tìm được này thành hai phần bằng nhau v.v... cho đến khi khoảng nhỏ nhất tìm được bằng cách như thế bằng 2^{-n}, trong đó n là số cho trước tùy ý lớn, chẳng hạn n = 100, n = 100000 v.v... sau đó cộng tất cả các khoảng đó lại với nhau (không kể khoảng cuối cùng), ta được độ dài :

$$s_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... + 1/2^n \quad (3)$$

Dễ dàng nhận thấy rằng s_n khác 1 một lượng $(1/2)^n$ và sự sai khác đó nhỏ bao nhiêu cũng được hoặc « dần tới 0 » khi n tăng vô hạn. Nói rằng hiệu đó *bằng* 0 khi n bằng « vô hạn » là không có nghĩa. Vô hạn trong

toán học liên kết với *một quá trình* nào đó không có cái tận cùng và không khi nào liên hệ với *một đại lượng* thực tại. Để mô tả sự biến thiên của s_n, ta nói rằng tổng s_n dần tới giới hạn 1 khi n dần tới vô hạn, và viết là:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \qquad (4)$$

trong đó vế phải là một *dãy vô hạn*. Không nên hiểu đẳng thức sau cùng này theo nghĩa cộng vô hạn các số hạng: đó chỉ là cách *viết tắt* của sự kiện: 1 là giới hạn của các tổng hữu hạn s_n khi n *dần tới* vô hạn (nhưng *không bao giờ bằng* vô hạn). Như vậy đẳng thức (4) có một ý nghĩa chính xác thể hiện qua dãy từ bắt buộc sau đây:

« 1 bằng giới hạn (khi n dẫn tới vô hạn) của biểu thức:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} » \qquad (5)$$

và viết ngắn gọn hơn như sau:

$$s_n \to 1 \text{ khi } n \to \infty \qquad (6)$$

Khi nói về các giới hạn, ta còn xem xét thêm một thí dụ nữa. Giả thử ta có một dãy vô hạn các lũy thừa khác nhau của q:

$$q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \dots,\ q^n,\ \dots$$

Nếu $-1 < q < 1$, chẳng hạn $q = \frac{1}{3}$ hoặc $q = \frac{-4}{5}$, thì q^n sẽ dẫn tới 0 khi n tăng vô hạn. Nếu q là số âm thì dấu của q^n xen kẽ nhau: sau + đến − và ngược lại. Bởi thế, q^n dẫn tới 0 « từ hai phía ». Chẳng hạn, nếu:

$$q = \frac{1}{3} \text{ thì } q^2 = \frac{1}{9},\ q^3 = \frac{1}{27},\ q^4 = \frac{1}{81},\ \dots;$$

nếu $q = -\frac{1}{2}$ thì $q^2 = \frac{1}{4}$, $q^3 = -\frac{1}{8}$, $q^4 = \frac{1}{16}$, ...

Ta khẳng định rằng: giới hạn của q^n bằng 0 nếu q dần tới vô hạn hoặc viết bằng ký hiệu là: $q^n \to 0$ khi $n \to \infty$, nếu $-1 < q < 1$ (7). (Nếu $q > 1$ hoặc $q > -1$ thì q^n không dẫn tới 0, mà tăng lên vô hạn về giá trị tuyệt đối).

Ta nên nêu chứng minh chặt chẽ của khẳng định (7). Ở trang 40 ta đã thấy rằng với mọi n nguyên dương và $p > -1$ có bất dẳng thức $(1+p)^n \geqslant 1 + np$. Giả thử q là số dương nào đó nhỏ hơn đơn vị, thí dụ $q = \frac{9}{10}$. Lúc đó, có thể đặt $q = \frac{1}{1+p}$, trong đó $p>0$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{q^n} = (1+p)^n \geqslant 1 + np > np,$$

hoặc (xem định nghĩa trang 102): $0 < q_n < \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$.

Nghĩa là, q^n bao hàm giữa số không đổi 0 và số $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$, nó dần tới 0 khi n tăng vô hạn (vì p không đổi). Do đó rõ ràng $q^n \to 0$. Nếu q là số âm thì ta đặt $q = -\frac{1}{1+p}$, như vậy q^n sẽ bao hàm giữa các số $-\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$ và $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$; lập luận cũng sẽ được kết thúc như ở trên.

Bây giờ ta xét *cấp số nhân*:

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots q^n \tag{8}$$

(Trường hợp $q = \frac{1}{2}$ đã được xét ở trên). Như đã chứng

minh (trang 38) tổng s_n còn có thể được biểu thị dưới dạng đơn giản và ngắn gọn hơn. Nhân s_n với q ta được:

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1} \quad (8a)$$

và lấy (8) trừ đi (8a) ta được kết quả là:

$$(1 - q)s_n = 1 - q^{n+1}$$

hoặc sau khi chia cho $1 - q$:

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Ta sẽ gặp khái niệm giới hạn nếu cho n tăng lên vô hạn. Ta vừa mới thấy rằng $q^{n+1} = q . q^n$ dần tới 0 nếu $-1 < q < 1$, do đó có thể kết luận:

$$s_n \to \frac{1}{1-q} \text{ khi } n \to \infty \text{ nếu } -1 < q < 1 \quad (9)$$

Cũng có thể viết được kết quả đó nếu dùng dãy vô hạn:

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... = \frac{1}{1-q} \text{ khi } -1 < q < 1 \quad (10)$$

Thí dụ: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

tương ứng hoàn toàn với đẳng thức (4); ta cũng có:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + ... = \frac{9}{10} . \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1,$$

hay nói cách khác: 0,9999... = 1. Hoàn toàn tương tự như vậy, phân số hữu hạn 0,2374 và phân số vô hạn 0,23739999... sẽ biểu thị cho cùng một số. Ta sẽ trở lại khái niệm giới hạn trong chương VI khi xem xét vấn đề này với quan điểm hiện đại và chặt chẽ hơn về mặt logic.

4. Số hữu tỉ và phân số thập phân tuần hoàn. Những số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ không biểu thị được dưới dạng phân số thập phân hữu hạn, có thể phân tích được thành những phân số thập phân vô hạn nhờ phương pháp chia « kéo dài » thông thường. Số dư trong mỗi giai đoạn của quá trình này phải khác 0 vì nếu không thế thì phân số đã là hữu hạn. Những số dư khác nhau chỉ có thể là những số nguyên từ 1 đến q – 1, do đó có tất cả q – 1 khả năng đối với giá trị của các số dư đó. Điều này có nghĩa là sau q phép chia thì một số dư k nào đó sẽ xuất hiện hai lần. Nhưng như thế thì tất cả các số dư tiếp sau cũng sẽ được lặp lại theo thứ tự mà chúng đã xuất hiện sau lần xuất hiện đầu tiên của số dư k. Bởi thế, *dạng thập phân của mọi số hữu tỉ đều có tính chất tuần hoàn*; sau một số số lẻ thập phân nào đó thì một nhóm các số lẻ thập phân sẽ bắt đầu được lặp lại vô hạn lần. Thí dụ, $\frac{1}{6} = 0{,}1666666...$; $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857...$; $\frac{1}{11} = 0{,}09090909$; $\frac{122}{1100} = 0{,}110909090909...$; $\frac{11}{90} = 0{,}1222222...$ vv... (Về những số hữu tỉ được biểu thị dưới dạng phân số thập phân hữu hạn, ta chú ý rằng sau số lẻ thập phân cuối cùng của nó thì chữ số 0 sẽ được lặp lại vô hạn lần, do đó, những số hữu tỉ loại này cũng không bị loại ra khỏi nhận xét tổng quát nêu trên). Qua những thí dụ đã dẫn ta thấy rằng ở một số dạng thập phân của số hữu tỉ thì « cái đầu » không tuần hoàn đứng trước « cái đuôi » tuần hoàn.

Ngược lại, có thể chứng minh rằng *mọi phân số thập phân tuần hoàn là số hữu tỉ*. Chẳng hạn, ta xét phân số thập phân tuần hoàn :

$$p = 0{,}332222...$$

Có thể viết: $p = \frac{33}{100} + 10^{-3} . 2(1 + 10^{-1} + 10^{-2}...)$

Biểu thức trong ngoặc là cấp số nhân vô hạn:

$$1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

Nghĩa là:

$$p = \frac{33}{1000} + 10^{-3} . 2 . \frac{10}{9} = \frac{2970 + 20}{9 . 10^{-3}} = \frac{2990}{9000} = \frac{299}{900}$$

Chứng minh cũng được tiến hành như vậy trong trường hợp tổng quát, nhưng đòi hỏi phải đưa vào một số ký hiệu cồng kềnh phức tạp. Ta xét phân số tuần hoàn tổng quát:

$$p = 0, a_1a_2a_3 ... a_m b_1b_2 ... b_n b_1b_2 ... b_n b_1b_2 ... b_n$$

Gọi $B = 0, b_1b_2 ... b_n$ là chu kỳ. Bây giờ có thể viết:

$$p = 0, a_1a_2a_3 ... a_m + 10^{-m} B(1 + 10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n}...)$$

Biểu thức trong ngoặc là cấp số nhân vô hạn với $p = 10^{-n}$. Tổng cấp số nhân này theo công thức (10) bằng

$$\frac{1}{1 - 10^{-n}} \text{ và } p = 0, a_1a_2a_3 ... a_m + \frac{10^{-m} . B}{1 - 10^{-n}}$$

5. Định nghĩa tổng quát số hữu tỉ bằng các đoạn thẳng.

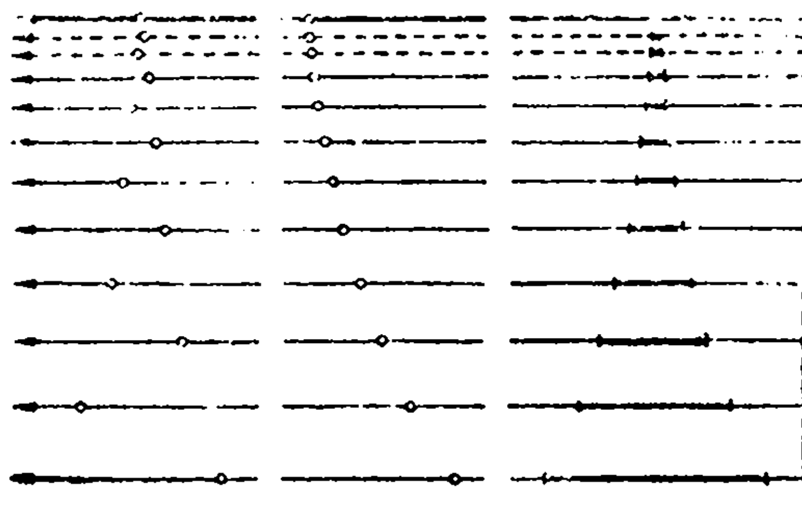
Ta đưa ra định nghĩa sơ bộ ở trang 117 «Số» là phân số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn. Ta đã qui ước gọi những phân số thập phân không biểu thị được bởi số hữu tỉ là số vô tỉ. Dựa vào những kết quả thu được trong mục trước, ta có thể phát biểu như sau: «*continum số hoặc hệ thống các số thực* (ở đây số «thực» đối lập với số «ảo» hoặc «phức») *là tập hợp tất cả các phân số thập phân vô hạn*» khi viết thêm các số 0 vào thì phân số thập phân hữu hạn có dạng vô hạn, hoặc có một phương pháp khác thay chữ số cuối cùng a của phân số bởi a — 1 rồi thêm vào dấy một dãy vô hạn số 9. Chẳng hạn, 0,999 = 1 (xem mục 3).

Số hữu tỉ là phân số tuần hoàn, số vô tỉ là phân số không tuần hoàn. Song, một định nghĩa như vậy là chưa hoàn toàn đầy đủ. Thực vậy, như ta đã thấy trong chương I, hệ thập phân về bản chất không có gì đặc biệt so với các hệ thống khác. Chẳng hạn, ta cũng có thể xử lý hoàn toàn như thế đối với hệ nhị phân. Do đó, việc đưa ra một định nghĩa tổng quát hơn của continum số, độc lập với việc chọn cơ số 10 hoặc cơ số bất kỳ nào khác, là rất cần thiết. Có lẽ, phương pháp đơn giản nhất để khái quát hóa là như sau :

Ta xét một dãy nào đó các đoạn thẳng I_1, I_2, I_3..., I_n với các đầu mút hữu tỉ ; ta giả thiết rằng mỗi đoạn tiếp sau đều nằm trong đoạn trước và độ dài đoạn thứ n (I_n) dần tới 0 khi n tăng vô hạn. Ta gọi dãy các đoạn « lồng » vào nhau như vậy là *dãy các đoạn thắt*. Trong trường hợp thập phân thì độ dài I_n bằng 10^{-n}, nhưng nó có thể bằng 2^{-n}, hoặc chỉ cần nó nhỏ hơn $1/n$ cũng được. Bây giờ, ta đưa ra một mệnh đề sau đây được xem như một định đề hình học cơ bản với mọi dãy các đoạn thắt: Với mọi dãy các đoạn thắt, tồn tại một và chỉ một điểm trên trục số nằm trong mọi đoạn thẳng đó (Rất rõ ràng rằng không thể tồn tại quá một điểm như vậy vì độ dài các đoạn thẳng dần tới 0, mà hai điểm khác nhau thì không thể ở trong một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy). Điểm đó, theo định nghĩa, được gọi là *số thực* ; nếu không hữu tỉ thì được gọi là *vô tỉ*. Nhờ định nghĩa này, ta thiết lập được sự tương ứng hoàn toàn giữa các điểm và các số. Ở đây, không có gì hoàn toàn mới : đó chỉ là định nghĩa số như một phân số thập phân vô hạn dưới dạng tổng quát hơn mà thôi.

Ở đây, hẳn mọi bạn đọc sẽ có những hoài nghi hoàn toàn có cơ sở. Thực ra thì « điểm » trên trục số không tương ứng với số hữu tỉ nằm trong mọi đoạn thắt, là cái gì ? Câu trả lời của chúng ta là như sau sự tồn tại

những điểm trên trục số (xem như một hình ảnh hình học) nằm trong mọi đoạn thắt có các mút hữu tỉ là một *định đề hình học* cơ bản. Không cần qui nó về những mệnh đề toán học khác. Ta thừa nhận nó như đã thừa nhận các tiên đề và định đề khác trong toán học là dựa vào sự có lý về mặt trực giác và dựa vào lợi ích của nó trong việc xây dựng một hệ thống mệnh đề toán học liên tiếp. Một cách thuần túy hình thức ta có thể xuất phát từ một trục số mà ta tưởng tượng chỉ gồm những điểm hữu tỉ rồi sau đó định nghĩa điểm vô tỉ như *một ký hiệu biểu thị cho một dãy các đoạn thắt nào đó.* Điểm vô tỉ được xác định hoàn toàn bởi một dãy các đoạn thắt mà độ dài dần tới 0. Như thế định đề cơ bản của ta đã thực sự là một định nghĩa. Sau khi dãy các đoạn thắt đã được đưa vào nhờ trực giác nhằm khẳng định « sự tồn tại » của điểm vô tỉ thì, việc thừa nhận một định nghĩa như



H. 11. Các đoạn thắt. Giới hạn của các dãy.

thế có nghĩa là sự vứt bỏ « cái mạng » trực giác mà lập luận của ta đã dựa vào đó và, đã ý thức được rằng mọi tính chất toán học của các điểm vô tỉ là có thể nhận thức được và biểu diễn được với tư cách các tính

chất của dãy các đoạn thẳt. Với quan điểm toán học thuần túy thì, điều quan trọng ở đây là, nếu thừa nhận định nghĩa số vô tỉ như dãy các đoạn thắt, ta có thể định nghĩa phép cộng, phép nhân v.v... và quan hệ bất đẳng thức bằng cách mở rộng trực tiếp các định nghĩa tương ứng trong trường số hữu tỉ, do đó bảo toàn cả những định luật cơ bản trong trường số hữu tỉ. Chẳng hạn, muốn tính tổng hai số vô tỉ α và β nhờ hai dãy các đoạn thắt xác định ra các số α và β, ta sẽ xây dựng một dãy các đoạn thắt mới bằng cách cộng các điểm đầu và điểm cuối tương ứng của các đoạn thẳng nằm trong các dãy cho trước với nhau. Cũng có thể làm như vậy với tích $\alpha\beta$, hiệu $\alpha-\beta$ và thương $\frac{\alpha}{\beta}$. Dựa trên những định nghĩa này còn có thể chứng tỏ rằng các định luật số học đã được xét đến trong §1 của chương này sẽ không bị hủy bỏ khi chuyển sang số vô tỉ. Ta sẽ không trình bày tỉ mỉ vấn đề đó ở đây.

Việc thử lại tất cả các định luật trên là đơn giản và được thực hiện một cách trực tiếp không có khó khăn gì đặc biệt, nhưng nó có thể gây ra sự buồn chán cho những bạn đọc mới bắt đầu còn đang chú ý nhiều đến vấn đề có thể làm gì nhờ vào toán học hơn là việc phân tích các cơ sở lôgic của nó. Không hiếm có những cuốn giáo khoa mới nhất về toán ngay từ những trang đầu tiên đã cho những lý giải cầu kỳ về hệ thống số thực. Bạn đọc nào đã không để ý đến những trang sách đó có thể yên tâm vì, cho đến tận cuối thế kỷ XIX, tất cả các nhà toán học lớn đều còn phát minh trên cơ sở khái niệm « ngây thơ » về continum số bằng trực giác.

Cuối cùng, về quan điểm vật lý học thì định nghĩa số vô tỉ thông qua dãy các đoạn thắt phù hợp một cách tự nhiên với sự xác định số đo của một đại lượng nào đó bằng một loạt các phép đo liên tiếp với độ chính xác ngày càng lớn. Mọi thao tác được thực hiện để đo chiều dài của một đoạn thẳng nào đó chẳng hạn, chỉ có ý nghĩa thực tế trong phạm vi sai số cho phép nào đó, độ lớn của sai số này do độ chính xác của dụng cụ quyết định. Vì các số hữu tỉ là trù mật khắp nơi trên trục số, cho nên một thao tác vật lý nào đó, dù chính xác đến đâu cũng không cho phép phân biệt độ dài cho trước là hữu tỉ hay vô tỉ. Vì thế, có thể cho rằng không cần đến số vô tỉ để mô tả các hiện tượng vật lý. Nhưng trong chương VI chúng ta sẽ thấy rõ ưu thế thực sự của việc dùng số vô tỉ để mô tả về mặt toán học các hiện tượng vật lý, thể hiện ở sự đơn giản hóa lạ thường quá trình mô tả nhờ khả năng sử dụng tự do khái niệm giới hạn mà cơ sở của nó là continum số.

6. Các phương khác để xác định số vô tỉ. Lát cắt Đêđêkin. Risac Đêđêkin (1831—1916)—một trong những người đặt cơ sở xuất sắc nhất cho việc phân tích các cơ sở của toán học về mặt logic và triết học, đã chọn một con đường khác để định nghĩa số vô tỉ — Các bài báo của ông « Stetigkeit und irrationelle Zahlen »[1] và « Was sind und was sollen die Zahlen »[2] (1877) đã có ảnh hưởng sâu sắc đến việc nghiên cứu những nguyên lý cơ bản của toán học. Đêđêkin đã thích những khái niệm trừu tượng tổng quát hơn là những phép dụng

(a) « Sự liên tục và số vô tỉ ».
(2) « Số là gì và số phải như thế nào »?
(1) Tiếng Đức — Có nghĩa là « Sự liên tục và số vô tỉ »
(2) Tiếng Đức — Có nghĩa là « Số là gì và số phải như thế nào » chú thích của ND.

cụ thể kiểu như dãy các đoạn thắt. Qui trình của ông dựa trên tư tưởng «lát cắt». Bây giờ ta sẽ trình bày qui trình đó.

Ta giả thử rằng bằng một cách nào đó ta đã phân chia tập hợp số hữu tỉ thành hai lớp A và B sao cho mọi số b của lớp B lớn hơn mọi số a của lớp A. Mọi sự phân chia như thế gọi là *một lát cắt* trong phạm vi hữu tỉ. Nếu lát cắt được thực hiện thì phải xảy ra một trong ba khả năng logic sau đây:

1. Tồn tại một phần tử lớn nhất a^* trong lớp A. Khả năng này sẽ xảy ra, chẳng hạn trong trường hợp lớp A chứa tất cả số hữu tỉ $\leqslant 1$ và lớp B chứa tất cả số hữu tỉ > 1.

2. Tồn tại một phần tử nhỏ nhất b^* trong lớp B. Khả năng này sẽ xảy ra chẳng hạn trong trường hợp lớp A chứa tất cả số hữu tỉ < 1, lớp B chứa tất cả số hữu tỉ $\geqslant 1$.

3. Trong lớp A không có phần tử lớn nhất, trong lớp B không có phần tử nhỏ nhất. Lát cắt loại này xảy ra, chẳng hạn, trong trường hợp lớp A chứa mọi số hữu tỉ mà bình phương của chúng nhỏ hơn 2 còn lớp B chứa mọi số hữu tỉ mà bình phương của chúng lớn hơn 2. Các lớp A và B như vậy đã vét hết mọi số hữu tỉ, bởi vì ta đã chứng minh không có số hữu tỉ nào bình phương lên bằng 2.

Về mặt logic, trường hợp trong lớp A có phần tử lớn nhất a^* và trong lớp B có phần tử nhỏ nhất b^* sẽ không thể xảy ra, vì số hữu tỉ $\frac{a+b}{2}$ bao hàm giữa a và b sẽ lớn hơn phần tử lớn nhất trong lớp A và nhỏ hơn phần tử nhỏ nhất trong lớp B; tức là không nằm trong lớp A và cũng không nằm trong lớp B.

Theo Đêđêkin, trong trường hợp thứ ba – tức là khi không có số hữu tỉ lớn nhất trong lớp A không có số hữu tỉ nhỏ nhất trong lớp B thì lát cắt sẽ là một số vô tỉ nào đó. Dễ dàng thử lại rằng định nghĩa của Đêđêkin phù hợp với định nghĩa dựa trên cơ sở các đoạn lồng vào nhau: từ một dãy nào đó các đoạn lồng nhau I_2, I_3,... ta sẽ có một lát cắt nếu ta lấy mọi số hữu tỉ nhỏ hơn mút bên trái của ít nhất một đoạn I_n xếp vào lớp A, còn mọi số hữu tỉ khác xếp vào lớp B.

Về mặt triết học thì định nghĩa số vô tỉ của Đêđêkin có mức độ trừu tượng cao hơn vì nó không bị giới hạn trong một qui luật toán học xác định các lớp A và B nào. Canto (1845 – 1918) đã đề ra một phương pháp khác cụ thể hơn để định nghĩa continum số thực. Thoạt nhìn thì phương pháp này khác hẳn với phương pháp dùng dãy các đoạn thẳng lồng nhau và phương pháp dùng lát cắt, nhưng nó tương đương với mỗi phương pháp trên ở chỗ, continum số thu được trên cơ sở ba phương pháp có những tính chất hoàn toàn giống nhau. Tư tưởng của Canto xuất phát từ: 1) số thực có thể xem như phân số thập phân vô hạn, 2) phân số thập phân hữu hạn có thể xem như giới hạn của phân số thập phân vô hạn. Theo Canto, để không phụ thuộc vào phân số thập phân, ta thừa nhận rằng mọi dãy số hữu hạn a_1, a_2, a_3... (hội tụ) xác định một số thực. Ở đây « sự hội tụ » được hiểu là hiệu « $a_m - a_n$) giữa hai số hạng của dãy dần tới 0, nếu m và n đồng thời tăng lên vô hạn độc lập với nhau (các xấp xỉ thập phân liên tiếp có tính chất này vì sau số lẻ thứ n hai xấp xỉ bất kỳ sai khác nhau ít hơn 10^{-n}). Theo phương pháp của Đêđêkin thì một số thực có thể được xác định bởi những dãy số hữu tỉ khác nhau, cho nên cần nói thêm

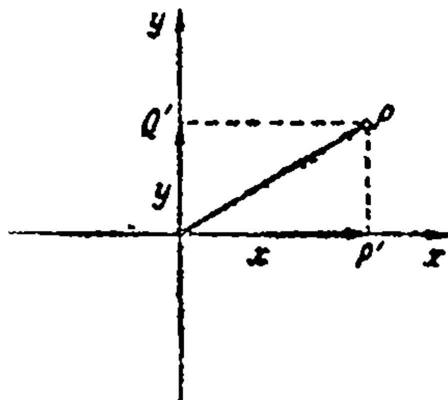
rằng, hai dãy $a_1, a_2, a_3 \ldots$ và $b_1, b_2, b_3 \ldots$ sẽ xác định cùng một số thực nếu hiệu $a_m - b_n$ dần tới 0 khi n tăng lên vô hạn. Việc định nghĩa phép cộng, phép nhân v.v... theo con đường Đêđêkin đã vạch ra sẽ không gặp khó khăn gì.

§ 3. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý TRONG PHẠM VI HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

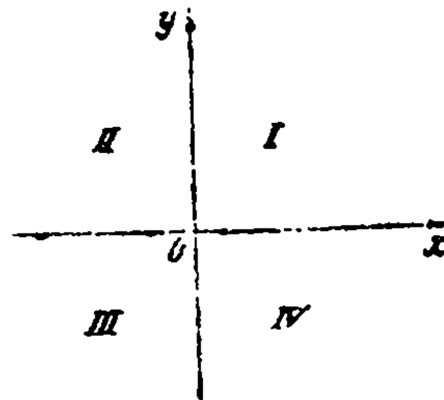
1. Nguyên tắc cơ bản. Ngay từ đầu thế kỷ XVII continum số đã được thừa nhận như là một cái gì đó đương nhiên hoặc có chịu một sự phê phán qua loa, đã trở thành cơ sở của toán học, đặc biệt của hình học giải tích và phép vi tích phân.

Việc đưa vào continum số cho ta khả năng ứng với *mỗi đoạn thẳng* một số thực xác định nào đó với tư cách là « độ dài » của đoạn thẳng đó. Nhưng còn có thể đi xa hơn nữa. Không chỉ độ dài, mà nói chung, *bất kỳ một vật thể hình học nào cũng có ý nghĩa của nó trong thế giới các con số*. Bước quyết định theo hướng số học hóa hình học đã được Phecma (1601 – 1665) giải quyết trước năm 1629 và Đêcac (1596 — 1650) giải quyết trong năm 1637. Tư tưởng cơ bản của hình học giải tích là việc sử dụng « tọa độ » — những số liên kết với vật thể hình học cho trước và hoàn toàn đặc trưng cho vật thể đó. Phần lớn bạn đọc đã biết tọa độ vuông góc hay tọa độ Đêcac dùng để xác định vị trí một điểm tùy ý trên mặt phẳng. Ta sẽ dùng hai đường thẳng vuông góc với nhau trên mặt phẳng: « trục x » và trục y ». Những trục này được xem như các đường thẳng số có hướng, trong đó phép đo được thực hiện nhờ

cùng một đoạn thẳng đơn vị. Mỗi điểm P (hình 12) được cho tương ứng với hai tọa độ x và y. Những tọa độ này được xác định như sau. Ta xét một đoạn thẳng có hướng (vectơ) đi từ « gốc » O đến điểm P, rồi chiếu vuông góc vectơ đó xuống cả hai trục, được đoạn chiếu OP' trên trục x và OQ' trên trục y. Hai số x và y là số đo, theo thứ tự;



H. 12. Tọa độ vuông góc của một điểm.



H. 13. Bốn góc phần tư.

của độ dài các hình chiếu OP' và OQ' được gọi là *tọa độ* của điểm P. Ngược lại, nếu x và y là hai số bất kỳ cho trước thì điểm P tương ứng sẽ được xác định một cách đơn trị. Nếu cả hai số x và y đều dương, thì P nằm trong *góc phần tư thứ nhất* của hệ tọa độ (hình 13), nếu x và y đều âm thì điểm P nằm trong góc thứ ba, nếu x âm và y dương thì điểm P nằm trong góc thứ hai. Khoảng cách giữa điểm P_1 có tọa độ x_1, y_1 và điểm P_2 có tọa độ x_2, y_2 được cho bởi công thức:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad (1)$$

Điều này suy ra ngay từ định lý Pitago (hình 14)

2. Phương trình của đường thẳng và đường cong. Nếu C là một điểm cố định có tọa độ x = a, y = b thì quỹ tích những điểm P cách C một khoảng r cho trước là đường tròn tâm C bán kính r. Từ công thức tính

khoảng cách giữa hai điểm (1) suy ra những điểm nằm trên đường tròn có tọa độ x, y thỏa mãn phương trình:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Phương trình này được gọi là *phương trình của đường tròn* vì nó biểu thị điều kiện cần và đủ để một điểm P có tọa độ x, y nằm trên đường tròn tâm C bán kính r. Nếu mở ngoặc, phương trình có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = k \qquad (3)$$

trong đó $k = r^2 - a^2 - b^2$. Đảo lại, nếu cho trước phương trình dạng (3) trong đó a, b và k là những hằng số tùy ý và tổng $k + a^2 + b^2$ dương thì nhờ qui trình đại số « bổ sung cho đủ một bình phương » ta có thể viết phương trình đó dưới dạng:

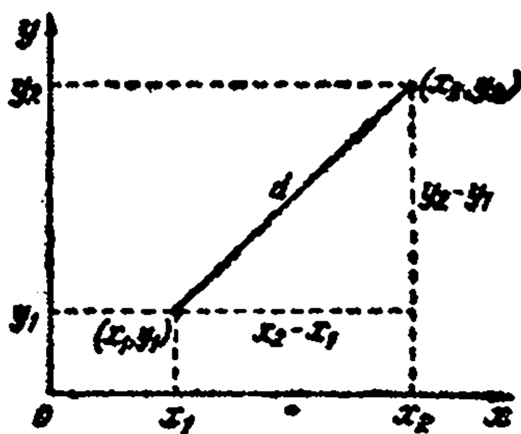
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

trong đó $r^2 = k + a^2 + b^2$. Bây giờ thì rõ ràng rằng phương trình (3) xác định một đường tròn bán kính r tâm C có tọa độ a, b.

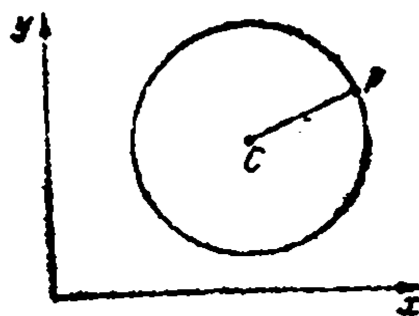
Về hình thức, phương trình của đường thẳng còn đơn giản hơn. Chẳng hạn, phương trình của trục x có dạng $y = 0$ vì với mọi điểm trên trục này thì tọa độ y bằng 0 và đối với những điểm khác thì không như thế. Cũng vậy, trục y có phương trình $x = 0$. Các đường thẳng đi qua gốc và chia đôi góc giữa các trục có phương trình là $x = y$ và $x = -y$. Dễ dàng chứng tỏ rằng mọi đường thẳng đều có phương trình dạng:

$$ax + by = c \qquad (4)$$

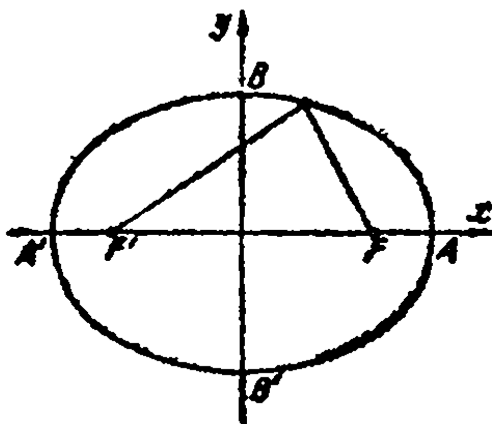
trong đó a, b, c là những hằng số đặc trưng cho đường thẳng. Cũng như đối với các trường hợp khác, ý nghĩa của phương trình (4) là: một cặp số thực x, y thỏa mãn phương trình là tọa độ của một điểm nào đó trên đường thẳng và ngược lại.



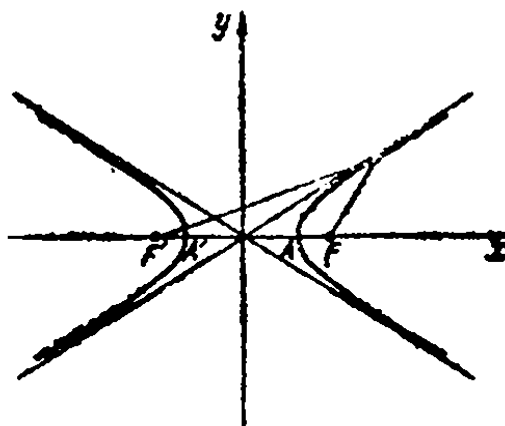
H. 14. Khoảng cách giữa hai điểm.



H. 15. Đường tròn.



H. 16. Elip với các tiêu điểm



H.17. Hypebon với các tiêu điểm

Có thể, khi học ở nhà trường bạn đọc đã biết phương trình dạng:

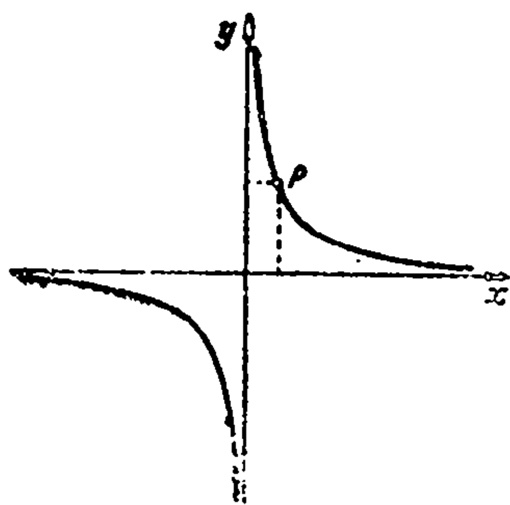
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 \qquad (5)$$

biểu thị một *elip* (h.16). Đường cong này cắt trục x ở các điểm A(p,0) và A'(−p,0) và cắt trục y ở các điểm B(0,q) và B'(0,−q) – (Ký hiệu P (x,y) hoặc (x,y) được đưa vào để viết cho gọn, cần hiểu là: « điểm P có tọa độ x và y »). Nếu $p > q$ thì đoạn AA' có độ dài 2p

được gọi là *trục lớn* của của elip, còn đoạn BB' có độ dài 2q được gọi là *trục nhỏ* của elip. Elip là qui tích của những điểm P mà tổng các khoảng cách đến các điểm $F(\sqrt{p^2-q^2}, 0)$ và $F'(-\sqrt{p^2-q^2}, 0)$ bằng 2p. Để luyện tập, bạn đọc có thể thử lại điều đó bằng cách áp dụng công thức (1). Các điểm p và p' được gọi là *tiêu điểm* của elip, còn tỉ số $e = \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p}$ được gọi là *tâm sai*. Phương trình dạng:

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1 \qquad (6)$$

biểu thị một hypebon. Đường cong này gồm hai nhánh cắt trục x ở hai điểm A (p,0) và A' (— p,0) (h.17). Đoạn AA' có độ dài 2p được gọi là *trục thực* của hypebon. Hypebon ra xa vô tận, dẫn tới hai đường thẳng $qx \pm py = 0$ nhưng không cắt chúng; những đường thẳng đó được gọi là các *đường tiệm cận* của hypebon. Hypebon là quĩ tích những điểm P' mà hiệu các khoảng cách đến hai hai $F(\sqrt{p^2+q^2}, 0)$ và $F'(-\sqrt{p^2+q^2}, 0)$ có giá trị tuyệt đối bằng 2p. Trong trường hợp này, những điểm F và F' cũng được gọi là các *tiêu điểm*; *tâm sai* của hypebon là tỉ số:



H. 18. Hypebol cân diện tích hình chữ nhật xác định bởi điểm p (x ; y) bằng 1.

$$e = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p}.$$

Phương trình $xy = 1$ (7) cũng xác định một pybebon, nhưng các đường tiệm cận là hai trục x và y (h. 18). Phương trình của hypebon « cân » này có ý nghĩa về mặt hình học là diện tích hình chữ nhật OP'PQ' (h.12), ứng với mọi điểm P của đường cong đều bằng 1. Dạng tổng quát hơn của hypebon cân :

$$xy = c \tag{7a}$$

trong đó c là hằng số. là trường hợp riêng của hypebon, cũng như đường tròn là trường hợp riêng của elip. Đặc điểm riêng của hypebon cân là hai tiệm cận của nó (ở đây là hai trục) vuông góc với nhau.

Đối với chúng ta thì tư tưởng chủ đạo sau đây là điều đáng chú ý nhất: có thể mô tả được hoàn toàn các vật thể hình học dưới hình thức số học hoặc đại số. Đối với các phép toán hình học cũng đúng như vậy. Chẳng hạn, nếu muốn tìm giao điểm của hai đường thẳng, thì ta xét hai phương trình :

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \tag{8}$$

Muốn tìm các giao điểm của hai đường thẳng này chỉ cần giải hệ (8). Cũng vậy, giao điểm của hai đường cong tùy ý (chẳng hạn, đường tròn $x^2 + y^2 = 2ax - - 2by = k$ và đường thẳng thẳng $ax + by = c$) được tìm bằng cách giải hệ gồm hai phương trình đó.

§ 4. GIẢI TÍCH TOÁN HỌC CÁI VÔ HẠN

1. Các khái niệm cơ bản. Dãy số tự nhiên:

$$1, 2, 3, \ldots$$

là một thí dụ đầu tiên, quan trọng nhất của tập hợp vô hạn. Không có gì là bí hiểm trong vấn đề xem dãy

đó là vô hạn, nó « không có tận cùng »: dù số tự nhiên n lớn đến đâu cũng có thể tìm được một số khác n + 1 đứng sau nó và lớn hơn nó. Nhưng khi chuyển từ tính ngữ « vô hạn » thực chất có nghĩa là « không có tận cùng » đến danh từ « sự vô hạn » thì không thể đưa vào một giả thiết là: « sự vô hạn » (được ký hiệu ∞) được xem như một con số thông thường. Không thể đưa ký hiệu ∞ vào hệ thống số thực mà không dẫn tới sự hủy bỏ các định luật cơ bản của số học. Hơn nữa, tư tưởng vô hạn còn thâm nhập vào toàn bộ toán học, bởi vì các sự vật toán học thường được nghiên cứu không phải với tư cách các cá thể – riêng biệt từng cái — mà với tư cách các phần tử của những lớp hoặc những tập hợp chứa vô số các phần tử cùng một loại, chẳng hạn, tập hợp các số tự nhiên, số thực hoặc tập hợp các tam giác trong mặt phẳng. Chính vì nguyên nhân này mà cần phân tích chính xác về mặt toán học cái vô hạn. Lý thuyết tập hợp hiện đại do Canto và trường phái của ông sáng lập đã giải quyết vấn đề này và đã đạt, được những kết quả đáng kể vào cuối thế kỷ XIX. Lý thuyết tập hợp của Canto đã thâm nhập sâu vào nhiều ngành toán học và đã có ảnh hưởng lớn đến chúng, nó đã có vai trò đặc biệt xuất sắc trong các công trình nghiên cứu có liên quan đến cơ sở logic và triết học của toán. Khái niệm tập hợp là khái niệm cơ bản của lý thuyết Canto. Đó chính là một nhóm các sự vật (các phần tử) được xác định theo một qui tắc nào đó cho phép ta có thể phán đoán được rằng một sự vật có thuộc hay không thuộc vào nhóm các sự vật ấy hay không. Có thể dùng tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các phân số thập phân tuần hoàn; tập hợp các số thực hoặc tập hợp các đường thẳng trong không gian ba chiều làm thí dụ.

Muốn so sánh các tập hợp về mặt « số lượng » các phần tử có trong chúng, cần phải đưa vào trong lý

thuyết này khái niệm « sự tương đương » giữa các tập hợp. Nếu có thể cho tương ứng từng đôi các phần tử của hai tập hợp A và B sao cho mỗi phần tử của tập hợp A tương ứng với một và chỉ một phần tử của tập hợp B, mỗi phần tử của tập hợp B cũng tương ứng với một và chỉ một phần tử của tập hợp A thì sự tương ứng như vậy được gọi là một – một. Ta nói rằng, hai tập hợp A và B *tương đương* với nhau. Khái niệm tương đương của các tập hợp hữu hạn trùng với khái niệm *bằng nhau về số*, bởi vì hai tập hợp hữu hạn có tương ứng một – một khi và chỉ khi chúng có cùng một số phần tử. Cần lưu ý rằng phép đếm cũng dựa trên cơ sở này vì khi ta « đếm » các phần tử của một tập hợp thì quá trình đếm là sự xác định một tương ứng một – một giữa các phần tử của tập hợp và các số 1, 2…, n.

Muốn thiết lập sự tương đương giữa hai tập hợp hữu hạn, có khi không cần « đếm » các phần tử. Chẳng hạn như không cần đếm cũng biết tập hợp hữu hạn các đường tròn có bán kính đơn vị là tương đương với tập hợp các tâm của chúng.

Khi chuyển khái niệm tương đương qua tập hợp vô hạn, Cantơ nghĩ đến việc tạo ra « số học » của vô hạn. Tập hợp các số thực và tập hợp các điểm trên đường thẳng là tương đương vì sau khi đã chọn gốc và đoạn thẳng đơn vị thì đường thẳng cho trước trở thành « đường thẳng số » và mỗi điểm P của nó được cho tương ứng một – một với một số thực x hoàn toàn xác định là tọa độ của điểm ấy:

$$P \leftrightarrow x$$

Các số chẵn tạo thành một tập hợp con thực sự của tập hợp các số tự nhiên, còn tất cả các *số nguyên* lập thành một tập hợp sự của tập hợp con thực *các số hữu tỉ* (khi nói về tập hợp con « thực sự » của

một tập hợp S nào đó, ta hiểu đó là một tạp hợp S' gồm những phần tử của tập hợp S nhưng *không bao gồm tất cả* các phần tử của nó). Rõ ràng rằng nếu một *tập hợp cho* trước là hữu hạn, tức là chứa n phần tử, thì tập hợp đó không thể tương đương với *bất kỳ một hập hợp con thực sự nào của nó* bởi vì mọi tập hợp con thực sự của nó chứa nhiều nhất n − 1 phần tử. Nhưng nếu *tập hợp cho trước chứa vô số phần tử thì nó có thể tương đương với một tập hợp con thực sự của nó*. Chẳng hạn sơ bộ:

1	2	3	4	5...	n...
↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	4	6	8	10 ...	2n...

thiết lập sự tương ứng một − một giữa tập hợp các số tự nhiên và tập hợp các số dương chẵn. Hai tập hợp này là tương đương, tuy rằng tập hợp thứ hai là tập hợp con thực sự của tập hợp thứ nhất. Điều mâu thuẫn với chân lý phổ biến « toàn thể lớn hơn một bộ phận của nó » chứng tỏ có những điều lạ lùng đang chờ đợi chúng ta trong phạm vi « số học vô hạn ».

2. Sự đếm được của tập hợp số hữu tỉ và sự không đếm được của continum. Một trong những phát minh của Canto trong giải tích vô hạn là tập hợp số hữu tỉ (nhận tập hợp vô hạn số tự nhiên làm tập hợp con thực sự thì bản thân nó phải vô hạn) tương đương với tập hợp *số tự nhiên*. Mới nghe thì có vẻ lạ lùng, tập hợp số hữu tỉ trù mật khắp nơi mà lại không có nhiều phần tử hơn tập hợp số tự nhiên có những phần tử « phân tán » rải rác cách nhau khá xa hay sao. Thực vậy, để bảo toàn thứ tự tăng dần, ta không thể xếp đặt các số hữu tỉ dương như đã có thể làm với các số tự nhiên: số nhỏ nhất a là số đầu tiên, số b tiếp sau nó là số thứ hai v.v..., vấn đề là ở chỗ các số hữu tỉ trù

mật khắp nơi, vì thế không thể chỉ ra một số nào trong chúng là « tiếp theo sau về độ lớn ». Nhưng Canto đã lưu ý rằng, nếu bỏ yêu cầu « sắp xếp theo độ lớn » thì có khả năng sắp đặt tất cả số hữu tỉ thành một dãy r_1, r_2, r_3, r_4... tương tự dãy số tự nhiên. Sự sắp xếp các phần tử của một tập hợp nào đó thành dãy thường được gọi là *phép đánh số* tập hợp đó. Tập hợp có thể đánh số được gọi là tập hợp *đếm được*. Khi chỉ ra một trong những phương pháp đánh số tập hợp số hữu tỉ và do đó mà thiết lập tính đếm được của nó, Canto đã chứng tỏ rằng tập hợp hữu tỉ tương đương với tập hợp số tự nhiên, bởi vì :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \dots & r_n & \dots \end{matrix}$$

tạo nên sự tượng ứng đơn trị hai chiều giữa hai tập hợp. Bây giờ ta sẽ trình bày một phương pháp đánh số tập hợp số hữu tỉ.

Mỗi số hữu tỉ được viết dưới dạng $\frac{a}{b}$, trong đó a và b là các số nguyên ; một số này được sắp xếp dưới hình thức bảng sao cho số $\frac{a}{b}$ ở dòng thứ a và ở cột thứ b. Thí dụ, $\frac{3}{4}$ ở dòng thứ ba và cột thứ tư của bảng. Ta giả thử rằng mọi chỗ trống hoặc « khuyên tròn » trong bảng đều có các số tương ứng rồi vẽ theo bằng một đường gấp khúc liên tục đi qua mọi khuyên tròn. Bắt đầu từ 1, đi sang phải một bước ta được 2 coi như số hạng thứ hai của dãy ; sau đó theo đường chéo đi về bên trái xuống dưới ta được số hạng thứ ba $\frac{1}{2}$; tiếp theo ta đi thẳng xuống dưới được số hạng thứ tư $\frac{1}{3}$;

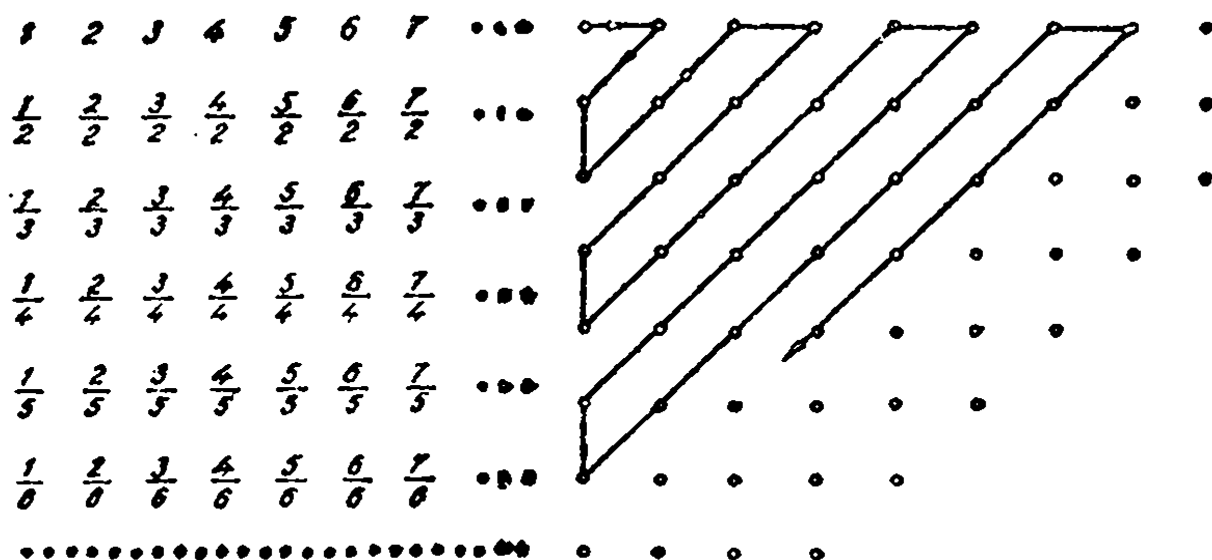
rồi đi theo đường chéo lên trên về bên phải qua $\frac{2}{3}$ đến 3; sang phải đến 4; đi theo đường chéo xuống dưới sang bên trái qua $\frac{3}{2}$ và $\frac{2}{3}$ đến $\frac{1}{4}$, v.v... như đã chỉ trên hình 19. Kết quả chuyền dịch theo đường gấp khúc dẫn ta đến dãy số hữu tỉ:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3},\ \ldots$$

Nếu bây giờ ta bỏ tất cả các phân số mà tử số và mẫu số có ước số chung khác 1, thì còn lại một dãy trong đó mỗi số hữu tỉ xuất hiện đúng một lần:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ 5\ldots$$

Như vậy, tập hợp các số hữu tỉ là đếm được. Chú ý rằng các số hữu tỉ tương ứng một — một với các điểm hữu tỉ trên trục số, cho nên có thể nói rằng *tập hợp các điểm hữu tỉ trên trục số là đếm được.*



H. 19. Đánh số các số hữu tỉ

Nếu như tập hợp các số hữu tỉ là đếm được thì phải chăng là *mọi* tập hợp vô hạn cũng đếm được, và như vậy, tất nhiên toàn bộ giải tích của vô hạn sẽ kết thúc. Nhưng hoàn toàn không phải như vậy. Phát minh sau đây của Canto cũng cực kỳ quan trọng: *tập hợp số thực (số hữu tỉ và vô tỉ) là không đếm được.* Nói cách khác, tập hợp số thực là một « kiểu vô hạn » hoàn toàn khác (bậc cao hơn, như ta thường nói) so với tập hợp chỉ gồm số nguyên hoặc tập hợp chỉ gồm số hữu tỉ. Chứng minh « gián tiếp » độc đáo của Canto về sự kiện này là mẫu mực cho nhiều chứng minh khác trong toán học. Tư tưởng của lập luận là như sau: ta xuất phát từ giả thiết là mọi số thực đều đã đánh số hết và sắp xếp chúng thành dãy, sau đó ta chỉ ra một số không thể là số nào trong dãy nói trên. Từ đó nảy ra mâu thuẫn. Vì ta đã giả thiết mọi số thực đều nằm trong dãy thì nếu như có ít nhất một số không nằm trong dãy thì phải coi giả thiết đó là sai. Như vậy, việc khẳng định mọi số thực đã được đánh số là không đúng. Không còn cách nào khác là phải thừa nhận rằng: tập hợp số thực không đếm được.

Ta nêu cụ thể lập luận này. Ta giả thiết rằng mọi số thực biểu thị dưới dạng phân số thập phân vô hạn được sắp xếp thành dãy:

Số thứ nhất N_1, $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots$
Số thứ hai N_2, $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots$
Số thứ ba N_3, $c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5 \ldots$
. . . .

trong đó chữ N_i biểu thị phần nguyên, còn các chữ a, b, c,... biểu thị phần lẻ thập phân bên phải dấu phẩy. Ta giả thiết rằng dãy đó bao gồm mọi số thực. Phần quan trọng của chứng minh là việc xây dựng một số

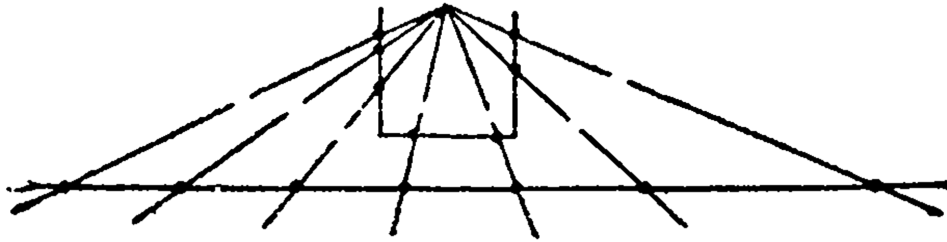
mới nhờ « qui trình đường chéo » mà, có thể chứng tỏ được rằng số này không có trong dãy của chúng ta.

Ta sẽ xây dựng một số như thế. Muốn vậy, ta lấy chữ số a tùy ý khác a_1, 0 và 9 ngay sau dấu phẩy (để tránh gặp khó khăn nảy ra từ các đẳng thức kiểu 0,999 ... = 1,000...); sau đó lấy chữ số thứ hai b khác b_2, 0 và 9; chữ số thứ ba c khác c_3, 0 và 9 v.v... (để xác định hơn có thể thỏa thuận như sau: lấy $a = 1$ nếu $a_1 \neq 1$, còn khi $a_1 = 1$ thì lấy $a = 2$, tương tự như vậy với mọi chữ số b, c, d, e... khác). Bây giờ ta xét số:

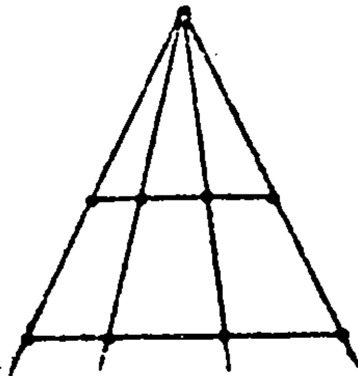
$$z = 0,abcde...$$

Số mới z này không nằm trong dãy của chúng ta. Thực vậy, nó không bằng số thứ nhất trong dãy vì có chữ số đầu tiên sau dấu phẩy khác nhau nó không bằng số thứ hai vì có chữ số thứ hai sau dấu phẩy khác nhau; nói chung nó khác số thứ n trong dãy vì có chữ số thứ n sau dấu phẩy khác nhau. Như vậy không có số z trong dãy tất cả các số thực của chúng ta. Nghĩa là tập hợp các số thực không đếm được.

Có thể bạn đọc sẽ cho là sự không đếm được của continum được qui định bởi sự kéo dài vô hạn của đường thẳng và, một đoạn thẳng hữu hạn chỉ chứa một tập hợp điểm đếm được. Muốn thấy rõ chỗ sai của mệnh đề trên cần xác nhận rằng mọi continum số xét về toàn bộ là tương đương với một khoảng hữu hạn nào đó, chẳng hạn khoảng đơn vị từ 0 đến 1. Có thể tìm được sự tương ứng một — một như vậy nếu bẻ gập khoảng đó ở các điểm 1/3 và 2/3 rồi dùng phép chiếu như đã vẽ trên hình 20. Qua đó, thấy rằng một khoảng (và tất nhiên, một đoạn) hữu hạn chứa một tập hợp không đếm được điểm.



H. 20. Sự tương ứng một – một giữa các điểm của một khoảng (bị gập lại) với các điểm của đường thẳng



H. 21. Sự tương ứng một – một giữa các điểm của hai đoạn thẳng có độ dài khác nhau

Còn một chứng minh khác có tính chất trực giác nhiều hơn về sự không đếm được của cotinum. Căn cứ vào mệnh đề sau cùng (h. 21) thì chỉ cần tập trung vào những điểm của đoạn đơn vị từ 0 đến 1. Chứng minh cũng là «gián tiếp» như chứng minh trước. Ta giả thiết rằng tập hợp tất cả các điểm của đoạn đó có thể xếp thành dãy

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Ta phủ điểm a_1 bằng một khoảng có độ dài bằng 1/10, điểm a_2 bằng một khoảng dài $\frac{1}{10^2}$ v.v... Nếu mọi điểm của đoạn đơn vị nằm trong dãy (1) thì toàn bộ đơn vị sẽ được phủ bằng một tập hợp vô hạn các khoảng (có thể có phần chồng chéo nhau) có độ dài $1/10, 1/10^2, \ldots$ Tổng độ dài của các đoạn phủ là:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Như vậy, giả thiết dãy (1) chứa tất cả các điểm thực của đoạn đơn vị dẫn đến kết luận là có thể phủ toàn bộ đoạn có độ dài bằng 1 bằng các đoạn thẳng có độ dài tổng cộng 1/9; về mặt trực giác thì điều này là vô lý. Ta tạm coi lập luận này như là một chứng minh, mặc dù cần phải phân tích sâu sắc hơn về mặt logic mới chặt chẽ.

Tiện thể nói thêm, lập luận vừa dẫn cho phép thiết lập một định lý có giá trị lớn trong lý thuyết độ đo hiện đại. Thay thế những khoảng đã nêu ở trên bằng những khoảng nhỏ hơn có độ dài $\frac{\varepsilon}{10^n}$, trong đó ε là số dương tùy ý bé, ta thấy rằng mọi tập hợp điểm đếm được trên đường thẳng có thể phủ bởi một tập hợp các đoạn có độ dài tổng cộng $\frac{\varepsilon}{9}$. Vì ε tùy ý bé cho nên $\frac{\varepsilon}{9}$ có thể nhỏ bao nhiêu cũng được. Dùng thuật ngữ của « lý thuyết độ đo » ta nói rằng tập hợp điểm đếm được có *độ đo 0*.

3. « Bản số » của Canto. Ta tóm tắt các kết quả đã thu được. Số các phần tử của một tập hợp *hữu hạn* A không thể bằng số phần tử của tập hợp *hữu hạn* khác B nếu A chứa nhiều phần tử B. Nhưng nếu thay thế khái niệm « các tập hợp có cùng một số hữu hạn các phần tử » bằng khái niệm tổng quát hơn: « các tập hợp tương đương » thì khẳng định nói trên sẽ không còn đúng đối với các tập hợp vô hạn: tập hợp các số nguyên chứa « nhiều » phần tử hơn tập hợp các số chẵn, còn tập hợp các số hữu tỉ chứa « nhiều » phần tử hơn tập hợp các số nguyên, nhưng như ta đã biết, các tập hợp

đó tương đương với nhau. Có thể ngờ rằng mọi tập hợp vô hạn là tương đương với nhau, nhưng Canto đã bác bỏ ý kiến đó: tồn tại một tập hợp — conitnum các số thực — không tương đương với bất cứ một tập hợp đếm được nào.

Như vậy, có ít nhất hai « kiểu vô hạn » khác nhau: vô hạn đếm được của các số tự nhiên và vô hạn không đếm được của continum. Nếu hai tập hợp A và B (hữu hạn hoặc vô hạn) tương đương với nhau thì ta nói rằng chúng có cùng một *bản số* (hoặc *lực lượng*). Đối với các tập hợp hữu hạn thì bản số được qui về số tự nhiên thông thường, nhưng khái niệm bản số mang tính chất tổng quát hơn. Hơn nữa, nếu tập hợp A tương đương với một tập hợp con nào đó của tập hợp B mà, bản thân B không tương đương với tập hợp A và cũng không tương đương với bất cứ bộ phận nào của nó thì theo Canto, ta nói rằng tập hợp B tương đương với một bản số lớn hơn tập hợp A. Việc dùng thuật ngữ « số » cũng phù hợp với việc dùng nó thông thường trong trường hợp tập hợp hữu hạn. Tập hợp các số nguyên là tập hợp con của tập hợp các số thực, trong khi đó thì tập hợp các số thực không tương đương với tập hợp các số nguyên và cũng không tương đương với bất cứ một tập hợp con nào của nó. Theo định nghĩa đã nêu thì continum số thực tương ứng với một bản số lớn hơn tập hợp số tự nhiên.

* Canto đã chứng minh rằng có thể xây dựng một dãy vô hạn các tập hợp vô hạn tương ứng với những bản số ngày càng lớn. Vì có thể xuất phát từ tập hợp các số tự nhiên, cho nên chỉ cần chứng minh rằng dù tập hợp A cho trước như thế nào cũng có thể xây dựng một tập hợp B khác có bản số lớn hơn A. Do tính khái quát cao của định lý này chớ nên chứng minh của nó không tránh khỏi trừu tượng. Ta xác định

tập hợp mà các phần tử của nó là tất cả các tập hợp con có thể có của tập hợp A. Ở đây, khi nói về các « tập con » của A, ta đề cập đến không những chỉ « những tập hợp con thực sự » của A mà còn kể cả bản thân A và tập hợp « rỗng » (∅) không chứa phần tử nào. Chẳng hạn, nếu A gồm ba số nguyên 1, 2, 3 thì B chứa 8 phần tử khác nhau (1, 2, 3), (1, 2), (1,3), (2 3), (1), (2), (3), và 0. Mỗi phần tử của tập hợp B chính là một tập hợp gồm những phần-tử nào đó của tập hợp A. Bây giờ, giả thử rằng B tương đương với A hoặc với một tập con của A tức là có một qui tắc nào đó cho tương ứng một – một giữa các phần tử của A hoặc của một tập con nào đó của A đối với tất cả các phần tử của B :

$$a \leftrightarrow S_a \qquad (2)$$

trong đó S_a biểu thị một tập con của A tương ứng với phần tử a của tập hợp A. Ta sẽ đi đến mâu thuẫn nếu chỉ ra được một phần tử nào đó của B, tức là một tập con T nào đó của tập hợp A mà không tương ứng với một phần tử a nào. Muốn xây dựng tập hợp con T thì trước hết phải chú ý rằng đối với mọi phần tử x của A có hai khả năng: hoặc tập hợp S_x chứa phần tử x hoặc không chứa nó. Ta sẽ xác định T như *một tập con của A gồm tất cả các phần tử x sao cho S không chứa x*. Tập hợp T được xác định như thế sẽ khác với mọi S_a ở ít nhất là phần tử a, bởi vì nếu S_a chứa a thì T không chứa a và nếu S_a không chứa a thì T chứa a. Như vậy, T không nằm trong tương ứng (2). Điều này cũng chứng tỏ là không thể thiết lập tương ứng một – một giữa các phần tử của A (hoặc của một tập con nào đó của A) với các phần tử của B. Nhưng hệ thức

$$a \leftrightarrow \{a\}$$

thiết lập sự tương ứng một – một giữa tất cả các phần tử của A và một tập hợp con của B gồm các tập con chứa một phần tử của A. Nghĩa là, tập hợp B tương ứng với một bản số lớn hơn tập hợp A theo định nghĩa đã dẫn ở trên.

Liệu có thể dễ dàng xây dựng một tập hợp điểm có bản số lớn hơn tập hợp điểm của đoạn thẳng đơn vị hay không? Một hình vuông có cạnh 1 (hình hai chiều) phải chăng chứa « nhiều » điểm hơn đoạn thẳng « một chiều ». Nhưng sự thật hoàn toàn khác: *bản số của các điểm của hình vuông đúng bằng*

bản số của các điểm của đoạn thẳng. Muốn chứng minh chỉ cần thiết lập tương ứng một – một giữa các điểm của hình vuông và các điểm của đoạn thẳng. Ta sẽ cố gắng làm việc đó.

Nếu (x, y) là một điểm nào đó của hình vuông đơn vị thì có thể biểu thị các tọa độ x và y của nó dưới dạng phân tích thập phân:

$$x = 0,\, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$
$$y = 0,\, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

trong đó để tránh mọi nghi ngờ, ta qui ước rằng số 1/4, chẳng hạn, sẽ được viết dưới dạng 0,25000... mà không viết dưới dạng 0,24999. Ta cho tương ứng với điểm (x,y) nói trên một điểm $Z = 0,\, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$ của đoạn thẳng. Tất nhiên, những điểm khác nhau (x, y) và (x', y') của hình vuông sẽ được tương ứng với những điểm khác nhau z và z' của đoạn thẳng điều này có nghĩa là bản số của tập hợp các điểm của hình vuông không vượt quá bản số của tập hợp các điểm của đoạn thẳng.

(Thực ra thì trong trường hợp này ta chỉ thiết lập được sự tương ứng một – một giữa mọi điểm của hình vuông với một tập con các điểm của đoạn thẳng, chẳng hạn, sẽ không có điểm nào của hình vuông tương ứng với điểm 0,2140909090... bởi vì ta qui ước viết 0,25000... chứ không viết 0,24999... Song, ta có thể thay đổi cách thiết lập sự tương ứng để thực sự có tương ứng một – một giữa tập hợp các điểm của hình vuông và tập hợp các điểm của đoạn thẳng). Một lập luận tương tự sẽ chứng tỏ rằng bản số của các điểm của hình lập phương cũng không vượt quá bản số của các điểm của đoạn thẳng. Mọi kết quả đó dường như mâu thuẫn với quan niệm trực giác về «thứ nguyên». Nhưng cần lưu ý rằng những tương ứng đã nêu trên không «liên tục». Khi ta di chuyển theo đoạn thẳng liên tục từ 0 đến 1 thì những điểm tương ứng trong hình vuông không tạo thành một đường cong liên tục mà xuất hiện theo một trật tự hoàn toàn «hỗn độn». Thứ nguyên của một tập hợp điểm không những chỉ phụ thuộc vào bản số của các điểm mà còn phụ thuộc vào cách sắp xếp của chúng trong không gian. Ta sẽ trở lại vấn đề này trong chương V.

4. Phương pháp chứng minh gián tiếp. Lý thuyết bản số chỉ là một trong những quan điểm của lý thuyết tập hợp tổng quát do Canto xây dựng bất chấp sự chỉ trích nặng nề của những nhà toán học xuất sắc nhất thời bấy giờ. Nhiều người trong số đó như Poăng Carê và Crônecke đã phản đối tính không xác định của khái niệm « tập hợp » tổng quát và chống lại tính chất không kiến thiết của các lập luận được áp dụng để xác định những tập hợp nào đó.

Trong số những lập luận không kiến thiết có những chứng minh được gọi là « thực sự gián tiếp ». Bản thân những chứng minh gián tiếp là một yếu tố thông thường nhất của tư duy toán học: để xác nhận sự đúng đắn của một mệnh đề A, đầu tiên ta giả thử rằng một mệnh đề khác A' đối lập với A là đúng; sau đó, một dây chuyền lập luận sẽ dẫn ta đến một khẳng định đối lập với A', điều này chứng tỏ sự không đúng đắn của mệnh đề A'. Dựa vào nguyên tắc cơ bản « bài trung » của logic thì sự đúng đắn của A được suy ra từ sự sai của A'.

Bạn đọc đã thấy một loạt các thí dụ về chứng minh gián tiếp như vậy rải rác trong cuốn sách này. Trong những thí dụ đó thì một chứng minh gián tiếp có thể được chuyển thành một chứng minh trực tiếp dễ dàng, nhưng hình thức « gián tiếp » có ưu thế ở chỗ ngắn gọn và tránh được việc xem xét những chi tiết là thứ yếu đối với mục tiêu gần nhất đề ra. Còn có những định lý mà cho đến nay vẫn chưa có một chứng minh nào khác ngoài các chứng minh gián tiếp. Có thể nói bản chất của chúng là thuận, nhưng không thể có về nguyên tắc, những chứng minh có tính chất kiến thiết cho chúng được. Chẳng hạn, đó là định lý nêu ở trang 109. Trong lịch sử toán học không ít những trường hợp mà, trong

khi mọi cố gắng của các nhà toán học nhằm *xây dựng* (« kiến thiết ») lời giải của những bài toán nào đó mà sự giải được của chúng đã được xác nhận, thì co một người nào đó đã vượt được mọi trở ngại nhờ một lập luận « gián tiếp » không kiến thiết.

Khi nói về việc chứng minh sự tồn tại của một sự vật thuộc một loại nhất định thì có sự khác biệt quan trọng giữa vấn đề xây dựng một mẫu rõ ràng của sự vật với vấn đề chứng minh rằng từ sự không tồn tại của sự vật có thể đi đến những mâu thuẫn. Trong trường hợp đầu tiên thì một sự vật cụ thể được tạo ra, trong trường hợp thứ hai thì, không có gì khác ngoài sự mâu thuẫn. Cách đây không lâu lắm một số nhà toán học có công lao lớn đã tuyên bố loại trừ hoàn toàn khỏi toán học mọi chứng minh không kiến thiết. Nếu như việc thực hiện kế hoạch đó là cần thiết thì sẽ kéo theo những khó khăn phức tạp rất lớn trong thời đại chúng ta; thậm chí còn có nguy cơ một bộ phận quan trọng của cơ thể toán học bị phá hủy trong quá trình chịu tác động của sự chấn động đó. Vì thế không lấy gì làm ngạc nhiên rằng những người theo trực giác chủ nghĩa thừa nhận chương trình đã nêu trên, đã gặp sự chống đối kiên quyết. Chính những người theo trực giác chủ nghĩa chính thống nhất cũng không thể luôn luôn sống theo chính kiến của mình.

5. **Nghịch lý của vô hạn.** Dù rằng theo quan điểm của đa số các nhà toán học thì lập trường không thỏa hiệp của các nhà trực giác chủ nghĩa là quá cực đoan, nhưng dù muốn hay không cũng phải thừa nhận lý thuyết tập hợp vô hạn có chịu sự đe dọa nghiêm trọng từ bên ngoài, đồng thời bên trong nó cũng phát hiện được những nghịch lý về logic rất rõ ràng. Cần lưu ý ngay rằng việc vận dụng một cách tự do không hạn độ khái

niệm «tập hợp» sẽ không tránh khỏi dẫn đến mâu thuẫn. Ta nêu ra ở đây một trong những nghịch lý như vậy do Bectơrăng — Rơtxel phát hiện ra.

Về nguyên tắc thì một tập hợp không chứa bản thân nó với tư cách là một phần tử. Thí dụ, tập hợp A các số nguyên chỉ chứa các phần tử là số nguyên, vì bản thân A không phải là số nguyên mà là *tập hợp* các số nguyên, cho nên A không chứa bản thân nó với tư cách là một phần tử. Ta qui ước gọi những tập hợp như vậy là « bình thường ». Tuy nhiên còn có những tập hợp chứa bản thân nó như một phần tử. Chẳng hạn, ta xét tập hợp S xác định như sau « S chứa các phần tử là tất cả các tập hợp có thể xác định bằng những mệnh đề có ít hơn ba mươi từ ». Vì bản thân S được xác định bởi một mệnh đề có ít hơn ba mươi từ cho nên nó là một phần tử của tập hợp S. Ta gọi những tập hợp như thế là « dị thường ». Dù sao đi nữa thì đa số tập hợp là bình thường. Ta xét *một tập hợp các tập hợp bình thường*. Ta biểu thị tập hợp này bằng chữ C. Mỗi phần tử của C là một tập hợp bình thường. Một câu hỏi nảy ra : *bản thân C là bình thường hay dị thường*? Tất nhiên nó phải hoặc là bình thường, hoặc là dị thường. Nếu C là tập hợp bình thường thì C sẽ chứa bản thân nó như một phần tử, vì C được định nghĩa như một tập hợp của tất cả các tập hợp bình thường. Nhưng nếu vậy C lại là một tập hợp dị thường vì theo định nghĩa thì C chứa bản thân nó như một phần tử. Mâu thuẫn đã được phát hiện ra. Như vậy ta thấy rằng chỉ với một giả thiết tồn tại tập hợp C mà nội tại đã mâu thuẫn.

6. Cơ sở của toán học. Những nghịch lý thuộc loại vừa nêu ở trên đã thức tỉnh Rơtxel và những người khác nghiên cứu một cách có hệ thống cơ sở của toán học và logic. Mục tiêu cuối cùng của những công trình

nghiên cứu đó là tạo ra cho các lập luận toán học có một cơ sở logic mà có thể chứng minh được nó không gặp mâu thuẫn và đủ phong phú để dựa vào đó mà suy diễn ra tất cả những gì được coi là quan trọng trong toán học hoặc ít ra là đa số những điều quan trọng đó. Mặc dầu không đạt được (có thể là không thể nào đạt được) mục tiêu quá tự tin đó, logic toán với tư cách là một đối tượng đặc biệt đã thu hút sự chú ý của ngày càng nhiều nhà nghiên cứu. Nhiều bài toán có liên quan đến vấn đề này tuy phát biểu đơn giản nhưng lại cực kỳ khó. Ta nêu làm thí dụ giả thuyết continum khẳng định rằng không tồn tại một tập hợp có bản số lớn hơn bản số của tập hợp số tự nhiên nhưng nhỏ hơn bản số của tập hợp số thực. Từ giả thuyết này có thể suy ra nhiều hệ quả lý thú, nhưng bản thân giả thuyết này cho đến nay vẫn chưa được chứng minh hoặc chưa bị bác bỏ. Vả lại, cách đây không lâu *Cuôc — Gơđel* đã chứng minh rằng nếu một hệ tiên đề thông thường nằm trong cơ sở của lý thuyết tập hợp, không chứa mâu thuẫn thì hệ tiên đề mở rộng có được khi thêm vào đó giả thuyết continum cũng không chứa mâu thuẫn [1]. Những vấn đề được xem xét trong logic toán, xét cho cùng, dẫn đến một vấn đề cơ bản: hiểu như thế nào về sự tồn tại trong toán học? May mắn là sự tồn tại của bản thân toán học không phụ thuộc vào việc có tìm được câu trả lời đầy đủ cho vấn đề đó hay không. Trường phái « những người theo chủ nghĩa hình thức » do nhà toán học vĩ đại Hinbe đứng đầu khẳng định rằng trong toán học thì sự tồn tại có nghĩa là « phi mâu thuẫn ». Nếu thừa nhận quan điểm đó thì

1) Năm 1963 nhà toán học Mỹ Còen đã chứng minh được sự phụ thuộc của giả thuyết continum vào hệ tiên đề lý thuyết tập hợp mà Gơđel thừa nhận.

một nhiệm vụ cấp bách và cần thiết là xây dựng một hệ tiên đề từ đó có thể suy ra toàn bộ toán học bằng suy diễn lôgic và chứng minh rằng những tiên đề đó không hề dẫn tới mâu thuẫn. Những kết quả gần đây của Godel và những người khác dường như chứng tỏ được rằng một chương trình như thế, ít nhất là dưới hình thức mà bản thân Hinbe đã vạch ra, là không thực hiện được. Điều rất có ý nghĩa là lý thuyết xây dựng toán học hình thức hóa lại dựa rất nhiều vào các quá trình trực giác. Dù bằng con đường này hoặc con đường khác, dưới hình thức bộc lộ hoặc ẩn tàng, thậm chí cả khi khoác bộ áo tiên đề, logic, hình thức chủ nghĩa hoàn hảo nhất thì trực giác có tính chất kiến thiết vẫn là yếu tố thiết thân nhất trong toán học.

§5. SỐ PHỨC

1. Sự phát sinh số phức. Do nhiều nguyên nhân cùng với nhu cầu mở rộng khái niệm về số, thậm chí vượt ra ngoài phạm vi continum số thực, dẫn đến việc sử dụng số phức. Cần quan niệm rõ rằng mọi sự mở rộng và đưa cái mới vào tương tự như thế hoàn toàn không phải là kết quả của những sự nỗ lực cá nhân. Có thể xem đó như là kết quả của một quá trình tiến hóa dần dần, trong quá trình đó không nên cường điệu vai trò những cá nhân riêng lẻ. Một trong những nguyên nhân thúc đẩy sự xuất hiện và việc sử dụng phân số và số âm là sự mong muốn có một độ tự do lớn trong các tính toán hình thức. Mãi đến cuối Trung cổ các nhà toán học mới hết băn khoăn và thắc mắc khi xử lý các khái niệm đó, trong khi mà một cảm giác tương tự như vậy không hề có đối với những khái niệm cảm thụ một

cách trực giác, cụ thể, như khái niệm số tự nhiên. Quy trình đơn giản nhất cần dùng đến số phức là *việc giải các phương trình bậc hai.* Ta nhớ lại sự việc đã xảy ra khi cần phải xác định giá trị của ẩn số x thỏa mãn phương trình tuyến tính $ax = b$. Nghiệm duy nhất $x = b/a$ và việc đưa phân số vào nhằm làm cho mọi phương trình tuyến tính có hệ số nguyên (với $a \neq 0$) đều giải được. Các phương trình loại:

$$x^2 = 2 \qquad (1)$$

không có nghiệm trong phạm vi số hữu tỉ, nhưng có nghiệm trong trường số thực đã mở rộng. Nhưng ngay trường số thực cũng còn chưa đủ để xây dựng một lý thuyết hoàn chỉnh về phương trình bậc hai. Chẳng hạn, phương trình rất đơn giản sau đây:

$$x^2 = -1 \qquad (2)$$

không có nghiệm thực, bởi vì bình phương của một số thực không thể là số âm.

Hoặc ta bằng lòng với tình trạng những phương trình như vậy không giải được, hoặc đi theo con đường quen thuộc — mở rộng phạm vi số và đưa vào những số mới mà nhờ đó ta có thể giải được phương trình. Đó chính là điều ta đã làm khi đưa vào ký hiệu mới i và thừa nhận rằng $i^2 = -1$ *với tư cách một định nghĩa.* Nên hiểu rằng « đơn vị ảo » không có gì chung với số — một công cụ của *phép đếm.* Đó là một *ký hiệu* trừu tượng chịu sự chi phối của định luật cơ bản $i^2 = -1$, và giá trị của nó chỉ phụ thuộc vào việc mở rộng hệ thống nhờ việc đưa vào có thực sự là có ích hay không.

Vì muốn cộng và nhân với ký hiệu i cũng như đối với các số thường, tất nhiên ta phải dùng đến các ký hiệu loại 2i, 3i, —i, 2 + 5i, nói chung a + bi, trong đó

a và b là những số thực. Nếu các ký hiệu này phải tuân theo các định luật giao hoán, kết hợp và phân phối thì những phép tính sau đây là có thể được:

$$(2+3i)+(1+4i)=(2+1)+(3+4)i=3+7i;$$

$$\begin{aligned}(2+3i)(1+4i) &= 2+8i+3i+12i^2= \\ &=(2-12)+(8+3)i= \\ &=-10+11i\end{aligned}$$

Dựa vào những ý kiến đó, ta bắt đầu trình bày lý thuyết số phức một cách có hệ thống từ *định nghĩa* sau đây: ký hiệu dạng $a+bi$, trong đó a và b là hai số thực được gọi là số *phức với phần thực a và phần ảo b*. Các phép toán cộng và nhân trên các số này được thực hiện coi như i là một số thực bình thường, song phải thay thế $i^2=-1$. Nói chính xác hơn, phép cộng và phép nhân được xác định theo công thức:

$$\left.\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i, \\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Đặc biệt, ta có

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-abi+abi-b^2i^2=a^2+b^2 \quad (4)$$

Dựa vào những định nghĩa này, dễ nghiệm lại các định luật giao hoán, kết hợp và phân phối cũng đúng với các số phức. Hơn nữa, không những chỉ có phép nhân mà cả phép trừ và phép chia cũng ứng dụng được vào hai số phức chúng cho kết quả là những số phức cũng có dạng $a+bi$ sao cho các số phức lập thành *một trường*:

$$\left.\begin{aligned}&(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i, \\ &\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(Đẳng thức thứ hai sẽ vô nghĩa nếu $c+di=0+0i$ vì lúc đó $c^2+d^2=0$. Nghĩa là, vẫn còn loại trừ phép chia số 0, tức $0+0i$. Thí dụ:

$$(2+3i)-(1+4i)=1-i,$$

$$\frac{2+3i}{1+4i}=\frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{2-8i+3i+12}{1+16}=$$
$$=\frac{14}{17}-\frac{5}{17}i$$

Trường số phức chứa trường số thực như « một trường con » bởi vì số phức $a+0i$ đồng nhất với số thực a. Mặt khác, ta lưu ý rằng số phức dạng $0+bi=$ $=bi$ được gọi là số « thuần ảo ».

Khi đưa ký hiệu i vào, ta đã mở rộng trường số thực và được một trường các ký hiệu $a+bi$, trong trường này thì phương trình bậc hai ;

$$x^2=-1$$

Có hai nghiệm $x=i$ và $x=-i$. Thực vậy, theo định nghĩa thì $i.i=(-i)(-i)=i^2=-1$. Cần phải nói rằng chúng ta đã lãi khá nhiều ; có thể kiểm tra lại dễ dàng *mọi* phương trình bậc hai có dạng :

$$ax^2+bc+c=0 \qquad (6)$$

đã *giải được*. Quả vậy, nếu thực hiện trên đẳng thức (6) một loạt các phép biến đổi, ta có

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2},x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (7)$$

Ta lưu ý rằng nếu $b^2-4ac>0$ thì $\sqrt{b^2-4ac}$ là số thực bình thường và các nghiệm của phương trình (6) là thực; nếu $b^2-4ac<0$ thì $4ac-b^2>0$, do đó $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{-(4ac-b^2)}=\sqrt{4ac-b^2}\,.i$ như thế phương trình (6) có nghiệm là số ảo. Chẳng hạn, phương trình:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

có nghiệm thực $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2$ hoặc 3,

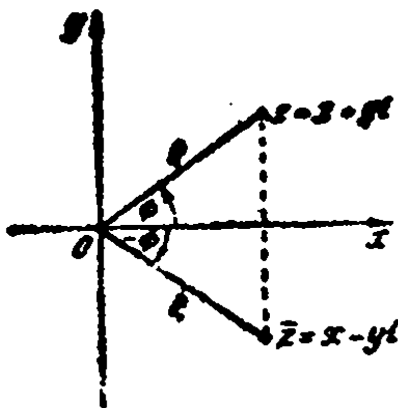
trong khi đó phương trình :

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

có nghiệm ảo $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 + i$

hoặc $1 - i$.

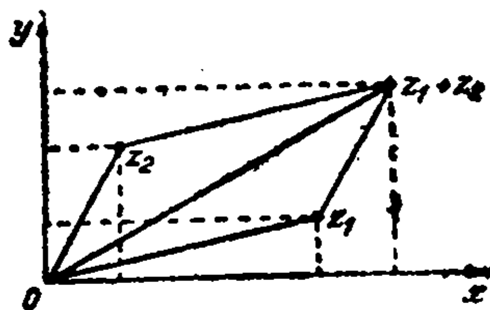
2. Biểu diễn hình học của số phức. Ngay từ thế kỷ XVI, trong các công trình toán học đã xuất hiện căn bậc hai của các số âm ở các công thức cho nghiệm của phương trình bậc hai. Nhưng thời ấy, các nhà toán học đã gặp khó khăn trong việc giải thích ý nghĩa chính xác của những biểu thức đó, họ nhìn chúng với một nỗi kinh hoàng huyền bí. Bản thân thuật ngữ «ảo» cho đến nay vẫn nhắc nhở ta những biểu thức như thế đã được xem như một cái gì đó nhân tạo, mất ý nghĩa thực tại. Mãi đến đầu thế kỷ XIX, khi vai trò của số phức đã được làm sáng tỏ trong lĩnh vực toán học khác nhau, người ta đã cho được một giải thích về hình học rất đơn giản của số phức và các phép toán với chúng. Điều này đã kết thúc mọi nghi ngờ về khả năng sử dụng số phức theo qui luật. Tất nhiên, với quan điểm hiện đại thì các phép toán hình thức với số phức là hoàn toàn có lý trên cơ sở các định nghĩa hình thức, còn việc biểu diễn hình học là không cần thiết về mặt logic. Nhưng một sự biểu diễn như vậy, hầu như cùng một lúc, đã được Vexxel (1745 – 1818), Argan (1768 – 1822) và Gauss đề nghị, cho phép ta xem xét số phức và các phép tính với chúng như một



H. 22. Biểu diễn hình học của số phức. Điểm Z có tọa độ vuông góc x, y

cái gì đó hoàn toàn tự nhiên về quan điểm trực giác. Ngoài ra, nó còn có ý nghĩa cực kỳ lớn đối với những ứng dụng của số phức trong bản thân toán học cũng như trong vật lý – toán.

Thể hiện hình học của số phức là một số phức $Z = x + yi$ được cho tương ứng với một điểm trên mặt phẳng với các tọa độ x, y. Cụ thể là, phần thực x được coi là hoành độ x, phần ảo là tung độ y. Bằng cách như vậy ta đã xác định được tương ứng một – một giữa các số phức và các điểm trên « mặt phẳng số », tương tự như tương ứng giữa các số thực và các điểm của « trục số » đã xác lập trước kia (xem § 2). Các điểm trên trục x trong mặt phẳng số sẽ tương ứng với các số thực $x = x + 0i$, còn các điểm trên trục y tương ứng với các số thuần ảo $Z = 0 + yi$. Nếu $Z = x + yi$ là một số phức nào đó thì số $\overline{Z} = x - yi$ được gọi là liên hợp với số Z. Trong mặt phẳng số, điểm $\overline{Z}$ suy ra từ điểm Z bằng phép đối xứng với trục x. Nếu ta qui ước biểu thị khoảng cách từ điểm Z đến góc là p thì dựa vào định lý Pitago:



H. 23. Phép cộng các số phức theo qui tắc hình bình hành.

$$p^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = Z\,.\,\overline{Z}.$$

Số thực $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ được gọi là *môđun* của Z và ký hiệu $p = |Z|$.

Nếu Z nằm trên trục thực thì Môđun của Z trùng với giá trị tuyệt đối của nó. Các số phức với môđun 1 được biểu thị bởi những điểm nằm trên «đường tròn đơn vị» có tâm là gốc, có bán kính 1.

Nếu $|Z| = 0$ thì $Z = 0$. Điều này được suy ra từ định nghĩa $|Z|$ là khoảng cách từ điểm Z tới gốc. Hơn nữa, *môđun của tích hai số phức bằng tích các môđun:*

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|.$$

Điều này coi như hệ quả của một định lý tổng quát hơn sẽ chứng minh ở trang 124.

Theo định nghĩa phép cộng hai số phức $Z_1 = x_1 + y_1 i$ và $Z_2 = x_2 + y_2 i$ ta có:

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Như vậy điểm $z_1 + z_2$ được biểu thị trên mặt phẳng số bởi đỉnh thứ tư của hình bình hành mà ba đỉnh đầu tiên là các điểm 0, Z_1, Z_2. Phương pháp dựng tổng của hai số phức này dẫn đến nhiều hệ quả quan trọng. Từ đó ta kết luận rằng *Môđun của tổng hai số phức không vượt quá tổng của hai môđun*

$$|Z_1 + Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2|.$$

Chỉ cần suy ra từ nhận xét chiều dài một cạnh của tam giác không lớn hơn tổng các độ dài của hai cạnh kia.

Góc giữa hướng dương của trục x và đoạn Oz được gọi là argumen của z, được biểu thị bởi chữ φ (xem hình 22). Các số Z và $\bar{Z}$ có cùng một môđun ($|\bar{Z}| = |Z|$), nhưng argumen của chúng đối nhau: $\bar{\varphi} = -\varphi$.

Tất nhiên argumen của Z được xác định không đơn vị, bởi vì có thể thêm vào hoặc trừ đi một góc tùy ý là bội của 360^0 và không thay đổi hướng của đoạn Oz. Như vậy, các góc φ, $\varphi + 360^0$, $\varphi + 720^0$, $\varphi + 1080^0$, ..., $\varphi - 360^0$, $\varphi - 720^0$, $\varphi - 1080^0$,...
về mặt đồ thị cho cùng một argumen.

Vì theo định nghĩa sin và cosin thì $x = p\cos\varphi$, $y = p\sin\varphi$ cho nên một số phức z bất kỳ được biểu thị qua môđun và argumen của nó như sau :

$$z = x + yi = p(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (8)$$

Thí dụ :

trong trường hợp $z = i$ ta có : $p = 1$, $\varphi = 90^0$,

» » » $z = 1 + i$ » : $p = \sqrt{2}$, $\varphi = 45^0$,

» » » $z = 1 - i$ » : $p = \sqrt{2}$, $\varphi = -45^0$,

» » » $z = -1 + \sqrt{3}i$ » : $p = 2$, $\varphi = 120^0$,

Vậy thì : $i = 1(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$$

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-45^0) + i\sin(-45^0))$$

$$-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120^0 + i\sin 120^0).$$

Bạn đọc có thể kiểm tra lại bằng cách thay vào đó giá trị bằng số của các hàm số lượng giác. Để giải thích ý nghĩa hình học của phép nhân hai số phức thì các biểu diễn lượng giác (8) là rất cần thiết. Nếu :

$Z = p(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $Z' = p'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'$,

thì $ZZ' = pp'\{(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + (\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi')i\}$

Nhưng theo các định lý cơ bản của sin và cosin thì :

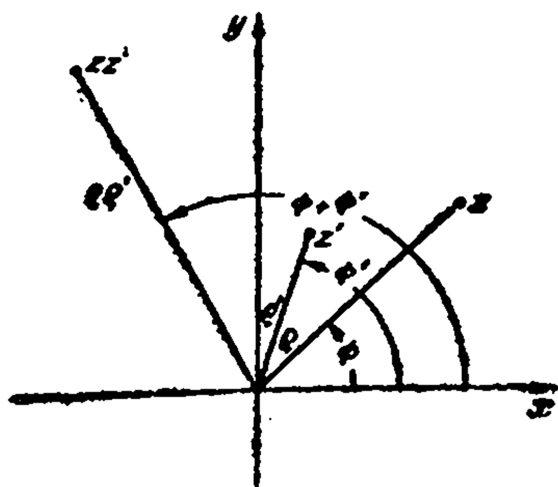
$$\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' = \cos(\varphi + \varphi'),$$

$$\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi' = \sin(\varphi + \varphi'),$$

cho nên :

$$ZZ' = pp'\{\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\} \qquad (9)$$

Vế phải của đẳng thức này là một số phức viết dưới dạng lượng giác với môđun pp' và argumen $\varphi + \varphi'$. Từ đó ta có thể kết luận rằng: *khi nhân hai số phức ta nhân các môđun với nhau và cộng các argumen với nhau* (h. 24). Như vậy, ta thấy rằng phép nhân các số phức có liên hệ với *phép quay*. Ta sẽ chính xác hóa hơn nữa vấn đề này.



H. 24. Phép nhân các số phức: cộng các argumen, nhân các môđun

Gọi hướng của đoạn thẳng đi từ gốc đến điểm Z là *vecto* của điểm Z, lúc đó môđun p = |Z| là độ dài của nó. Giả thử Z' là một điểm bất kỳ của đường tròn đơn vị, tức p' = 1. Trong trường hợp này, phép nhân Z với Z' chỉ đơn giản là phép quay vectơ Z một góc φ'. Nếu p' ≠ 1 thì cùng với phép quay, độ dài vectơ phải được nhân với p'. Đề nghị bạn đọc tự minh họa những sự kiện đó bằng cách nhân các số phức khác nhau với $Z_1 = i$ (quay 90°), $Z_2 = -i$ (cũng quay 90°), nhưng theo chiều ngược lại) $Z_3 = 1 + i$ và $Z_4 = 1 - i$)

Công thức (9) đặc biệt lý thú nếu $Z = Z'$, trong trường hợp này ta có:

$$Z^2 = p^2 (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Nhân với Z một lần nữa ta có: $Z^3 = p^3 (\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$

tổng quá với mọi n ta có:

$$Z^n = p^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (10)$$

Đặc biệt, nếu điểm Z nằm trên *đường tròn đơn vị* thì p = 1, ta đi đến công thức của nhà toán học Pháp Moavrơ (1667 — 1754)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (11)$$

Công thức này là một trong những hệ thức bổ ích và nổi tiếng nhất trong toán học sơ cấp. Ta giải thích điều này bằng thí dụ. Ta lấy n = 3 và phân tích vế trái theo công thức nhị thức:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

Như vậy ta có :

$$\cos^3\varphi + i\sin 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi)$$

Một đẳng thức phức như thế sẽ tương đương với hai đẳng thức thực. Quả vậy, nếu hai số phức bằng nhau thì phần thực của chúng bằng nhau, phần ảo của chúng bằng nhau. Như vậy ta có thể viết :

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi ; \ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Sau đó dùng hệ thức

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

ta có :

$$\cos 3\varphi + \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$
$$\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$

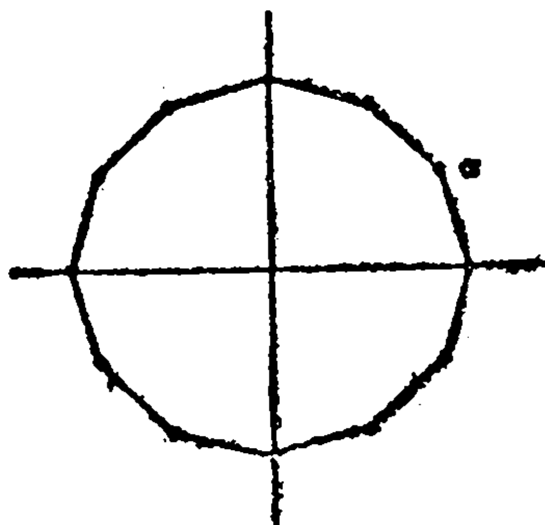
Cũng dễ dàng thu được các công thức biểu thị $\sin n\varphi$ và $\cos n\varphi$ qua $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$ với giá trị nguyên n tùy ý.

3. Công thức Moavrơ và các căn của đơn vị. Ta hiểu căn bậc n của một số a là một số b nào đó sao cho $b^n = a$. Nói riêng số 1 có hai căn bậc hai : 1 và −1 bởi vì $1^2 = (-1)^2 = 1$. Số 1 có một căn bậc ba *thực*, đó là số 1, trong khi nó có bốn căn bậc bốn : hai thực 1 và −1 và hai ảo i và −i. Những sự kiện đó dẫn ta đến ý nghĩ rằng trong miền phức phải có hai căn bậc hai của 1 (như vậy thì tất cả sẽ là ba căn bậc ba). Nhờ công thức Moavrơ ta sẽ chứng tỏ rằng điều dự đoán này là đúng. Ta khẳng định rằng *trong trường số phức có đúng n căn bậc n của 1. Những căn đó được biểu thị bằng các đỉnh của đa giác đều n cạnh nội tiếp trong hình tròn đơn vị và nhận điểm 1 là một đỉnh.*

Điều nói trên được thể hiện rõ trên hình 25 (tương ứng với trường hợp $n = 12$) Đỉnh thứ nhất của đa giác là 1. Các đỉnh tiếp sau là:

$$\alpha = \cos\frac{360^0}{n} + i\sin\frac{360^0}{n} \quad (12)$$

bởi vì argumen phải bằng $360^0/n$. Đỉnh tiếp theo là $\alpha.\alpha = \alpha^2$, bởi vì ta thu được nó bằng cách quay vectơ α một góc $360^0/n$. Tiếp theo ta được đỉnh α^3 v.v..., sau n bước ta quay trở lại đỉnh 1, tức là có được $\alpha^n = 1$.



H. 25. Mười hai nghiệm của lũy thừa bậc 12 của đơn vị.

Điều này cũng suy được từ công thức (11) vì:

$$\left(\cos\frac{360^0}{n} + i\sin\frac{360^0}{n}\right)^n = \cos 360^0 + i\sin 360^0 =$$

$$= 1 + 0i = 1.$$

Như vậy, $\alpha^1 = \alpha$ là nghiệm của phương trình $x^n = 1$. Đối với các đỉnh tiếp theo cũng đúng:

$$\alpha^2 = \cos\frac{720^0}{n} + i\sin\frac{720^0}{n}$$

Ta sẽ chứng minh được điều này nếu viết:

$$(\alpha^2)^n = \alpha^{2n} = (\alpha^n)^2 = 1^2 = 1$$

hoặc dùng công thức Moavrơ:

$$(\alpha^2)^n = \cos\left(n.\frac{720^0}{n}\right) + i\sin\left(n.\frac{720^0}{n}\right)$$

$$= \cos 720^0 + i\sin 720^0 = 1 + 0i = 1.$$

Cũng hoàn toàn như vậy, ta kết luận toàn bộ n số: $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}$ là các căn bậc n của 1. Nếu tăng

tiếp tục số mũ hoặc xét các số mũ âm, ta sẽ không thu được căn nào mới. Thực vậy:

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^n}{\alpha} = \alpha^{n-1} \text{ ; cũng thế } \alpha^n = 1,$$

$$\alpha^{n+1} = (\alpha^n)\alpha = 1 . \alpha = \alpha. \text{ v,v...}$$

các căn bậc hai đã tìm ra sẽ được lặp lại. Đề nghị bạn đọc chứng minh, coi như bài tập, chương trình đang xét không có nghiệm nào khác ngoài những nghiệm đã kê ra ở trên.

Nếu n chẵn thì một trong các đỉnh của đa giác n cạnh rơi vào điểm -1 phù hợp với sự kiện đại số ai cũng biết: -1 là căn bậc chẵn của 1.

Phương trình thỏa mãn các căn bậc n của 1 ($x^n - 1 = 0$) (13) là phương trình bậc n, nhưng có thể hạ thấp bậc của nó đi một đơn vị. Ta dùng công thức đại số:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) \qquad (14)$$

Vì tích của hai số bằng 0 khi và chỉ khi một trong các thừa số bằng 0 cho nên biểu thức (14) triệt tiêu hoặc khi $x = 1$, hoặc khi

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1 = 0 \qquad (15)$$

Các căn $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}$, thỏa mãn phương trình đó. Phương trình này được gọi là *phương trình chu số* hoặc *phương trình chia đường tròn*. Chẳng hạn, căn bậc ba ảo của 1 là:

$$\alpha = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$\alpha^2 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

là các nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ mà bạn đọc có thể thấy được bằng phép thế các giá trị của α vào phương trình. Cũng vậy, các căn bậc năm của 1 ngoài bản thân 1) thỏa mãn phương trình:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (16)$$

Muốn dựng một ngũ giác đều, cần phải giải một phương trình bậc bốn. Một mẹo đại số đơn giản — phép thế $\omega = x + \frac{1}{x}$ sẽ dẫn đến phương trình bậc hai. Ta chia phương trình (16) cho x^2 và hoán vị các số hạng:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

với chú ý rằng $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, ta có:

$$\omega^2 + \omega - 1 = 0$$

Theo công thức (7) mục 1 thì các nghiệm của phương trình bậc hai này sẽ có dạng:

$$\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Như vậy, căn ảo bậc năm của 1 là các nghiệm của hai phương trình bậc hai sau đây:

$$x + \frac{1}{x} = \omega_1 \text{ hoặc } x^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)x + 1 = 0$$

$$\text{và } x + \frac{1}{x} = \omega_2 \text{ hoặc } x^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)x + 1 = 0$$

Bạn đọc có thể giải các phương trình này theo công thức (7).

4. Định lý đại số cơ bản. Không những chỉ có các phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ hoặc $x^n - 1 = 0$ là giải được trong trường số phức mà còn có thể khẳng định xa hơn nhiều: mọi phương trình đại số bậc n với hệ số thực hoặc phức:

$$f(z) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (17)$$

đều giải được trong trường số phức. Đối với trường hợp phương trình bậc ba và bậc bốn, định lý này đã được xác nhận từ thế kỷ XVI bởi Tartal, Kardanô và những người khác: chúng được giải trực tiếp bằng các công thức tương tự công thức phương trình bậc hai nhưng

phức tạp hơn. Việc nghiên cứu phương trình tổng quát bậc 5 và bậc cao hơn đã được tiến hành kiên trì trong vòng gần hai thế kỷ, nhưng mọi cố gắng giải bằng công thức đều vô ích. Chàng thanh niên Gauss, trong luận văn tiến sĩ của mình (1799) đã lần đầu tiên chứng minh được sự *tồn tại* các nghiệm. Đó là một thành tựu vĩ đại nhất, dẫu rằng vấn đề về khả năng mở rộng các công thức cổ điển cho các trường hợp có bậc > 5 để tìm nghiệm nhờ các phép toán hữu tỉ và khai căn, vẫn còn chưa giải quyết được trong thời đó (xem trang 146 — 147).

Định lý Gauss khẳng định rằng: *với mọi phương trình đại số dạng (17), trong đó n là số nguyên dương, các hệ số a là những số thực hoặc số phức, tồn tại ít nhất một số phức $\alpha = c + di$ sao cho $f(\alpha) = 0$.*

Số α là nghiệm của phương trình (17), Chứng minh của định lý này sẽ được trình bày ở trang 299 — 301. Giả thử định lý đã được chứng minh, ta suy ra từ đó một định lý khác đã được biết với các tên định lý đại số cơ bản (đúng hơn nên gọi nó là định lý cơ bản của hệ thống số phức): Mọi đa thức đại số bậc n

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \qquad (18)$$

đều có thể biểu thị dưới dạng tích của đúng n thừa số:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - a_n) \qquad (19)$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số phức nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Chẳng hạn, đa thức $f(x) = x^4 - 1$ sẽ được phân tích thành các thừa số như sau:

$$f(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)(x + 1)$$

Các số α là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ được suy ra từ bản thân phân tích (19) là dĩ nhiên bởi vì khi $x = \alpha$ thì một trong các thừa số của $f(x)$ bằng 0. do đó bản thân $f(x)$ triệt tiêu.

Trong những trường hợp khác thì không nhất thiết mọi thừa số $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, ... của đa thức bậc n $f(x)$ phải khác nhau, chẳng hạn:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$$

chỉ có một nghiệm $x = 1$ « được tính hai lần » hoặc «bội 2 ». Trong mọi trường hợp, không thể phân tích một đa thức bậc n thành tích của quá n thừa số khác nhau dạng $x - \alpha$ và phương trình tương ứng không thể có quá n nghiệm. Khi chứng minh định lý đại số cơ bản ta sẽ dùng, không phải lần đầu, hằng đẳng thức đại số:

$$x^k - \alpha^k = (x - \alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \\ + \dots + \alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}) \qquad (20)$$

nó đã được dùng để tính tổng của cấp số nhân khi $\alpha = 1$.

Giả thử định lý Gauss đã được chứng minh. Nếu $\alpha = \alpha_1$ là nghiệm của phương trình (17) thì:

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + a_{n-2}\alpha_1^{n-2} + a_1\alpha_1 + a_0 = 0$$

Trừ nó vào f(x) và nhóm lại các số hạng, ta được đẳng thức:

$$f(x) = f(x) - f(\alpha_1) = (x^n - \alpha_n^1) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \\ + \dots + a_1(x - \alpha_1) \qquad (21)$$

Bây giờ dùng công thức (20), ta có thể tách thừa số $x - \alpha_1$ ra khỏi từng số hạng, đưa nó ra ngoài dấu ngoặc, bậc của đa thức còn lại trong ngoặc sẽ nhỏ đi một đơn vị. Nhóm các số hạng một lần nữa, ta được đồng nhất thức

$$f(x) = (x - \alpha_1)\, g(x)$$

trong đó g(x) là bậc đa thức bậc $n - 1$

$$g(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_1 x + b_0$$

Ở đây, ta không lưu ý đến việt tính các hệ số biểu thị qua b. Áp dụng tiếp tục lập luận đó vào g(x). Theo định lý Gauss, tồn tại một nghiệm α_2 của phương trình $g(x) = 0$ tức là:

$$g(x) = (x - \alpha_2)\, h(x)$$

trong đó h(x) là đa thức mới bậc n − 2. Lặp lại lập luận này n − 1 lần (tất nhiên, phải hiểu là áp dụng nguyên lý qui nạp toán học), cuối cùng ta đi đến phân tích

$$f(x) = (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2)\ (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) \qquad (22)$$

Từ đồng nhất thức (22) không những suy ra các số phức α_1, α_2, ... α_n là nghiệm của phương trình (17) mà còn suy ra không còn nghiệm nào khác nữa của phương trình (17) Thực vậy nếu số y là nghiệm của phương trình (17) thì, từ (22) suy ra :

$$f(y) = (y - \alpha_1)\ (y - \alpha_2) \ldots (y - \alpha^n) = 0$$

Nhưng ta thấy rằng tích các số phức chỉ bằng 0 khi một trong các thừa số bằng 0. Như thế, một trong các thừa số $y = \alpha$ phải bằng 0, tức là $y = \alpha_r$. Điều đòi hỏi đã được chứng minh.

§ 6. SỐ ĐẠI SỐ VÀ SỐ SIÊU VIỆT

1. Định nghĩa và vấn đề tồn tại. Số đại số là mọi số x thực hoặc ảo thỏa mãn một phương trình đại số nào đó có dạng:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$(n \geqslant 1,\ a_n \neq 0) \qquad (1)$$

trong đó các a_i nguyên. Chẳng hạn, số $\sqrt{2}$ là số đại số vì nó thỏa mãn phương trình $x^2 - 2 = 0$. Cũng vậy số đại số là mọi nghiệm của mọi phương trình có hệ số nguyên bậc ba, bậc bốn, bậc năm, bậc tùy ý, không phụ thuộc vào việc có thể biểu thị chúng dưới dạng căn thức hay không. Khái niệm số đại số là sự mở rộng tất nhiên của khái niệm số hữu tỉ tương ứng với trường hợp riêng n = 1.

Không phải mọi số thực đều là đại số. Điều này suy ra từ định lý sau đây do Canto đề xuất: *tập hợp số đại số là đếm được*. Bởi vì tập hợp số thực là không đếm được, cho nên bắt buộc phải tồn tại những số thực không phải là đại số.

Ta sẽ chỉ ra một phương pháp đánh số tập hợp số đại số. Ta cho ứng với mỗi phương trình dạng (1) một số nguyên dương:

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| + n,$$

để cho ngắn gọn ta gọi đó là «độ cao» của phương trình. Đối với mỗi giá trị n *cố định* chỉ có một số *hữu hạn* các phương trình dạng (1) với độ cao h. Mỗi phương trình như thế có nhiều nhất n nghiệm. Bởi thế, chỉ có một số hữu hạn các số đại số của phương trình có độ cao h; do đó, mọi số đại số có thể sắp thành dãy, bắt đầu kể từ những dãy nghiệm của phương trình có độ cao 1, sau đó độ cao 2,...

Chứng minh này về sự đếm được của tập hợp số đại số xác nhận sự tồn tại các số thực không phải đại số. Chúng được gọi là những số *siêu việt* (từ chữ latinh *transcendere* có nghĩa là trội hơn): Ơle đã cho chúng cái tên này vì chúng mạnh hơn các phương pháp đại số.

Chứng minh của Canto về sự tồn tại các số siêu việt không có tính chất kiến thiết. Về mặt lý thuyết thì có thể xây dựng được một số siêu việt nhờ qui trình đường chéo thực hiện trên bảng liệt kê tưởng tượng các phân tích thập phân của mọi số đại số; nhưng qui trình đó đã mất mọi giá trị thực tiễn và không đưa đến một số mà ta có thể viết một cách thực sự phân tích của nó dưới dạng phân số thập phân (hoặc bất kỳ một phân số nào khác). Vấn đề lý thú nhất có liên quan đến số siêu việt là ở chỗ chứng minh những số cụ thể, xác định (trong đó có các số π và e) là số siêu việt.

2. Định lý Lyuvill và việc xây dựng các số siêu việt

Chứng minh sự tồn tại số siêu việt đã được *J. Lyuvill* (1809 — 1862) nêu ra trước Canto. Nó thực sự cho ta khả năng xây dựng các thí dụ về những số như vậy. Chứng minh của Lyuvill khó hơn chứng minh của Canto, điều này không có gì đáng ngạc nhiên, bởi vì việc xây dựng một thí dụ, nói chung, khó hơn việc chứng minh sự tồn tại. Khi dẫn ra chứng minh của Lyuvill dưới đây, chúng tôi chỉ có ý định dành cho bạn đọc đã có một trình độ tương đối, tuy rằng muốn hiểu nó thì chỉ cần những kiến thức toán học sơ cấp đã hoàn toàn đủ. Lyuvill đã phát hiện được rằng những số đại số vô tỉ có tính chất là không thể xấp xỉ được bởi các số hữu tỉ với độ chính xác rất cao nếu như không chọn mẫu số cực kỳ lớn của các phân số xấp xỉ.

Ta giả thiết số z thỏa mãn phương trình đại số với hệ số nguyên

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \ (a_n \neq 0) \quad (2)$$

nhưng không thỏa mãn phương trình loại đó với bậc thấp hơn. Khi đó, ta nói rằng bản thân x là số đại số *bậc n*. Chẳng hạn số $Z = \sqrt{2}$ là số đại số bậc 2, nhưng không thỏa mãn phương trình bậc nhất; số $Z \sqrt[3]{2}$ là số đại số bậc 3 vì nó thỏa mãn phương trình $x^3 - 2 = 0$ nhưng không thỏa mãn phương trình bậc thấp hơn (như đã chứng minh trong chương III). Số đại học bậc $n > 1$ không thể là số hữu tỉ, bởi vì số hữu tỉ $Z = \frac{p}{q}$ thỏa mãn phương trình $qx - p = 0$. Mỗi số vô tỉ Z đều có thể xấp xỉ với độ chính xác tùy ý bằng một số hữu tỉ; điều này có nghĩa là bao giờ cũng có thể chỉ ra một dãy số hữu tỉ:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$$

với mẫu số tăng vô hạn mà $\frac{p_r}{q_r} \to Z$. Định lý Lyuvill khẳng định: mọi số đại số Z bậc $n > 1$ đều có thể xấp xỉ bằng mọi số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ với độ chính xác cao hơn $\frac{1}{q^{n+1}}$; nói cách khác, với những mẫu số đủ lớn bao giờ cũng có bất đẳng thức.

$$|Z - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{n+1}} \qquad (3)$$

Ta sẽ cố gắng chứng minh định lý này, nhưng trước hết ta sẽ chứng tỏ có thể dùng định lý này để xây dựng những số siêu việt như thế nào. Xét số

$$Z = a_1.10^{-1!} + a_2.10^{-2!} + a_3.10^{-3!} + \ldots + a_m.10^{-m!} + \ldots + a_{m+1}.10^{-(m+1)!} + \ldots = 0,a_1a_2\,000a_3\,\underbrace{00\ldots\ldots 0}_{17}a_4 00\ldots$$

trong đó a_i biểu thị các chữ số tùy ý từ 1 đến 9 (đơn giản nhất là cho tất cả a_i bằng 1) còn ký hiệu n! biểu thị cho 1 . 2 .... n như bình thường. Tính chất đặc trưng của phân tích thập phân của một số như vậy là độ dài các nhóm số 0 tăng nhanh xen kẽ những chữ số khác 0 đứng riêng rẽ. Ký hiệu Z_m là một phân số thập phân hữu hạn có được bằng cách lấy toàn bộ phần tính thập phân cho đến số hạng $a_m.10^{-m!}$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$|Z - Z_m| < 10 \,.\, 10^{-(m+1)!} \qquad (4)$$

Giả thử Z là một số đại số bậc m. Khi đó, đặt trong bất đẳng thức Lyuvill (3) $\frac{p}{q} = Z_m = \frac{p}{10^{m!}}$, ta phải có:

$$|Z - Z_m| > \frac{1}{10^{(n+1)m!}}$$

với những giá trị m đủ lớn. So sánh bất đẳng thức này với bất đẳng thức (4) ta có:

$$\frac{1}{10^{(n+1)m!}} < \frac{10}{10^{(m+1)!}} = \frac{1}{10^{(m+1)!-1}},$$

từ đó suy ra: $(n+1)^{m!} > (m+1)!^{-1}$
khi m đủ lớn. Những điều này không đúng với những giá trị m lớn hơn n (đề nghị bạn đọc chứng minh kỹ khẳng định này). Ta đi đến mâu thuẫn. Như vậy, số Z là số siêu việt.

Bây giờ ta chứng minh định lý Lyuvill. Ta giả thiết số Z là số đại số bậc $n > 1$ thỏa mãn phương trình (1) tức là $f(z) = 0$ (5). Giả thử $Z_m = \frac{p_m}{q_m}$ là một dãy số hữu tỉ trong đó $Z_m \to Z$. Thế thì:

$$f(Z_m) = f(Z_m) - f(Z) = a_1(Z_m - Z) + a_2(Z_m^2 - Z^2) + \\ + \dots + a_n(Z_m^n - Z^n)$$

Chia cả hai vế cho $Z_m - Z$ và dùng công thức đại số:

$$\frac{U_n - v_n}{U - v} = U^{n-1} + U^{n-2}v + U^{n-3}v^2 + \dots + Uv^{n-2} + v^{n-1}$$

ta có:

$$\frac{f(Z_m)}{Z_m - Z} = a_1 + a_2(Z_m + Z) + a_3(Z_m^2 + Z_mZ + Z^2) + \dots + \\ + a_n(Z_m^{n-1} + \dots + Z^{n-1}) \qquad (6)$$

Vì Z_m dần tới Z cho nên khi m đủ lớn thì số hữu tỉ Z_m sẽ khác Z ít hơn đơn vị. Vì thế, có thể đánh giá như sau khi m đủ lớn.

$$\left|\frac{Z_m}{Z_m - Z}\right| < |a_1| + 2|a_2|(|Z| + 1) + 3|a_3| \\ (|Z| + 1)^2 + \dots + n|a_n|(|Z| + 1)^{n-1} = M \qquad (7)$$

trong đó M không đổi vì Z là không đổi trong suốt quá trình chứng minh. Bây giờ ta chọn m đủ lớn sao cho

trong phân số $Z_m = \frac{p_m}{q_m}$ thì mẫu số q_m lớn hơn M; thế thì:

$$| Z - Z_m | > \frac{| f(Z_m) |}{M} > \frac{| f(Z_m) |}{q_m} \quad (8)$$

Để cho gọn, từ đây ta qui ước viết p thay cho p_m, viết q thay cho p_m. Như vậy thì:

$$| f(Z_m) | = \left| \frac{a_0q^n + a_1q^{n-1}p + ... + a_np^n}{q^n} \right| \quad (9)$$

Số hữu tỉ $Z_m = p/q$ không thể là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ bởi vì nếu thế thì từ đa thức $f(x)$ có thể tách thừa số $(x - Z_m)$, tức là Z thỏa mãn phương trình bậc thấp hơn n. Vậy thì $f(Z_m) \neq 0$. Nhưng tỉ số trong vế phải của đẳng thức (9) là một số nguyên cho nên giá trị tuyệt đối của nó ít nhất phải bằng đơn vị. Như vậy, so sánh các hệ thức (8) và (9) suy ra bất đẳng thức

$$| Z - Z_m | > \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q^{n+1}} \quad (10)$$

đó chính là điều phải chứng minh.

Trong vài chục năm gần đây những nghiên cứu đề cập đến khả năng xấp xỉ các số đại số bằng số hữu tỉ đã tiến rất xa. Chẳng hạn, nhà toán học Nauy A.Tue (1863 — 1922) đã chứng minh rằng trong bất đẳng thức của Lyuvill (3), có thể thay thế số mũ $n + 1$ bằng số mũ nhỏ hơn $(n/2 + 1)$, K. L.Zigel đã chứng minh rằng còn có thể chọn số mũ nhỏ hơn $(2\sqrt{n})$

Số siêu việt luôn luôn là một đề tài được các nhà toán học chú ý đến. Nhưng cho đến gần đây, trong những số được chú ý, ta mới chỉ biết được rất ít những số mà tính siêu việt của chúng đã được xác định (trong chương III, tính siêu việt của số sẽ được chứng minh, từ đó suy ra không thể cần phương trình tròn bằng

thước và compa). Trong báo cáo đọc tại hội nghị toán học quốc tế ở Pari năm 1900, David Hinbe đã đề xuất ba mươi bài toán có phát biểu đơn giản, một số bài là hoàn toàn sơ cấp và phổ cập, nhưng không những không có một bài toán nào được giải mà cách giải còn vượt khỏi những phương tiện của toán học hồi đó. Những « bài toán Hinbe » đó đã có tác dụng thúc đẩy mạnh mẽ toàn bộ thời kỳ phát triển toán học tiếp sau đó. Dù rằng hầu như tất cả những bài toán này chưa giải được, nhưng trong nhiều trường hợp việc giải chúng đã có liên quan đến những kết quả rõ ràng về mặt chuẩn bị những phương pháp tổng quát hơn và sâu sắc hơn. Một trong những bài toán dường như không có hy vọng giải được là vấn đề chứng minh số $2^{\sqrt{2}}$ là số siêu việt (hoặc ít ra là số vô tỉ). Trong vòng ba chục năm thậm chí không có một cách xử lý nào để có hy vọng đạt kết quả. Cuối cùng, Zigel và độc lập với ông, nhà toán học Nga trẻ tuổi A. Gelfond đã phát minh những phương pháp mới để chứng minh tính siêu việt của nhiều số có ý nghĩa trong toán học. Đặc biệt, đã xác định được tính siêu việt không những chỉ cho số Hinbe $2^{\sqrt{2}}$, mà còn cho một lớp rộng lớn những số dạng a^b trong đó a là số đại số ($\neq 0$ và $\neq 1$), b là số đại số vô tỉ.

PHỤ LỤC CHƯƠNG II

ĐẠI SỐ TẬP HỢP

1. Lý thuyết tổng quát. Khái niệm *lớp* hoặc *tập hợp* các sự vật là một trong những khái niệm cơ sở của toán học. Một tập hợp được xác định bởi một tính chất nào đó (thuộc tính) U mà mỗi sự vật đang xét phải có

hoặc không có; những sự vật có tính chất U tạo thành một tập hợp A. Chẳng hạn, nếu ta xét các số nguyên và tính chất U là « nguyên tố » thì tập hợp A tương ứng sẽ gồm tất cả các số nguyên tố 1, 2, 3, 5, 7,...

Lý thuyết toán học về các tập hợp xuất phát từ chỗ, nhờ các phép toán nhất định, có thể cấu thành những tập hợp mới từ các tập hợp cho trước (tương tự như nhờ các phép toán cộng và nhân thu được các số mới từ các số cho trước). Việc nghiên cứu các phép toán về tập hợp là đối tượng của « đại số tập hợp » có nhiều cái chung với đại số các số bình thường, dù rằng có điểm khác nhau. Sự kiện có thể áp dụng các phương pháp đại số để nghiên cứu các sự vật không phải là con số mà là các tập hợp đã minh họa cho tính khái quát cao của tư tưởng toán học hiện đại. Trong thời gian gần đây, ta thấy đại số tập hợp đã cho ra đời nhiều lãnh vực toán học, chẳng hạn lý thuyết độ đo và lý thuyết xác suất; nó cũng có ích trong việc hệ thống hóa các khái niệm toán học và làm sáng tỏ mối liên hệ logic giữa các khái niệm đó.

Từ đây ta sẽ ký hiệu một tập hợp sự vật không đổi nào đó là I mà bản chất của những sự vật đó ta không quan tâm đến. Ta gọi nó là *tập hợp vũ trụ*, còn các tập hợp con của nó được ký hiệu là A, B, C... Nếu I là tập hợp số tự nhiên thì A, có thể là tập hợp số chẵn, B là tập hợp số lẻ, C là tập hợp số nguyên tố v.v... Nếu tập hợp I là tập hợp điểm trên mặt phẳng thì A có thể là tập hợp các điểm nằm trong một hình tròn nào đó, B là tập hợp các điểm nằm trong một hình tròn khác v.v... Để thuận tiện, trong số các « tập con » ta kể cả bản thân I, cả tập hợp « rỗng » (O) không chứa phần tử nào. Sự mở rộng nhân tạo này nhằm mục đích bảo toàn ý kiến là mỗi tính chất U sẽ tương ứng với tập hợp những phần tử nào đó trong I có tính

chất ấy. Trường hợp U là một tính chất được thực hiện toàn bộ, có thể dùng tính chất thỏa mãn đẳng thức tầm thường $x = x$ làm thí dụ (nếu ta đề cập đến các số) thì tập con tương ứng của I sẽ là bản thân I, vì mỗi phần tử đều có tính chất đó, mặt khác, nếu U là một tính chất mâu thuẫn nội tại nào đó (thuộc loại $x \neq x$) thì tập con tương ứng hoàn toàn không chứa phần tử nào, nó là tập hợp « rỗng » và được ký hiệu là 0.

Ta nói rằng tập hợp A là một *tập con* của tập hợp B, hay gọn hơn « A nằm trong B » hoặc « B chứa A » nếu trong tập hợp A không có phần tử nào không nằm trong B. Quan hệ này được ký hiệu là $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.

Thí dụ, tập hợp A các số nguyên chia hết cho 10 là tập con của tập hợp B các số nguyên chia hết cho 5, bởi vì mỗi số chia hết cho 10 cũng chia hết cho 5. Quan hệ $A \subset B$ không loại trừ quan hệ $B \subset A$. Nếu có đồng thời cả hai quan hệ thì ta viết $A = B$. Điều này có nghĩa mỗi phần tử của A cũng là phần tử của B và ngược lại, tức là các tập hợp A và B chứa những phần tử như nhau.

Quan hệ $A \subset B$, giữa các tập hợp nhắc nhở ta đến qua hệ $a \leqslant b$ giữa các số. Đặc biệt, ta lưu ý đến những tính chất sau đây của quan hệ đó:

1) $A \subset A$

2) Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$

3) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$

Do đó quan hệ $A \subset B$ còn được gọi là « quan hệ thứ tự ». Chỗ khác biệt chủ yếu giữa quan hệ đang xét và quan hệ $a \leqslant b$ giữa các số là ở chỗ giữa hai số thực a và b bất kỳ bao giờ cũng có ít nhất một trong các hệ thức $a \leqslant b$ hoặc $b \leqslant a$, trong khi đó thì điều khẳng

định tương tự là không đúng với quan hệ $A \subset B$ giữa các tập hợp. Thí dụ: nếu A là một tập hợp gồm các số, 1, 2, 3: $A = \{1, 2, 3\}$ còn B là tập hợp gồm các số 2, 3, 4: $B = \{2, 3, 4\}$ thì không có quan hệ $A \subset B$, cũng không có quan hệ $B \subset A$. Do đó, ta nói rằng các tập con A, B, C... Của tập hợp I là được sắp thứ tự bộ phận trong khi các số thực a, b, c... lập thành một tập hợp « có thứ tự tuyến tính »? Ngoài ra, ta lưu ý rằng từ định nghĩa quan hệ $A \subset B$ suy ra với một tập con bất kỳ A của tập hợp I, ta có:

4) $0 \subset A$ và 5) $A \subset I$

Tính chất 4) xem ra có vẻ vô lý, nhưng nếu suy nghĩ kỹ thì nó phù hợp với ý nghĩa chính xác của định nghĩa dấu $\subset$ một cách logic chặt chẽ. Thực vậy, hệ thức $0 \subset A$ chỉ bị xóa bỏ trong trường hợp tập rỗng 0 chứa một phần tử không thuộc A, song vì tập hợp rỗng hoàn toàn không chứa phần tử nào cả, cho nên không thể xảy ra sự vô lý đó với mọi A.

Bây giờ ta sẽ định nghĩa hai phép toán trên các tập hợp về mặt hình thức có nhiều tính chất đại số của phép cộng và phép nhân các số, mặc dù nội dung bên trong của nó là hoàn toàn khác với các phép tính số học đó. giả thử A và B là hai tập hợp nào đó. ***Hợp*** hoặc « tổng logic » của A và B là một tập hợp gồm những phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B (kể cả những phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B). Tập hợp này được ký hiệu $A + B$[1]. *Giao* hoặc « tích logic của A và B là một tập hợp gồm những phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B. Tập hợp này được ký hiệu AB[2]. Ta minh họa các

---

1. Hoặc $A \cup B$.
2. Hoặc $A \cap B$.

định nghĩa đã dẫn bằng một thí dụ. Vẫn lấy các tập hợp A và B như trước $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Thế thì $A + B = \{1, 2, 3, 4\}$, $AB = \{2, 3\}$

Ta nêu ra những tính chất đại số quan trọng sau đây của các phép toán $A + B$ và AB — Dựa vào các định nghĩa của bản thân các phép toán, bạn đọc có thể thử lại các tính chất đó:

6) $A + B = B + A$ 7) $A.B = B.A$

8) $A + (B + C) = (A + B) + C$ 9) $A(BC) = (AB).C$

10) $A + A = A$ 11) $A.A = A$

12) $A(B + C) = AB + AC$

13) $A + (BC) = (A + B)(A + C)$

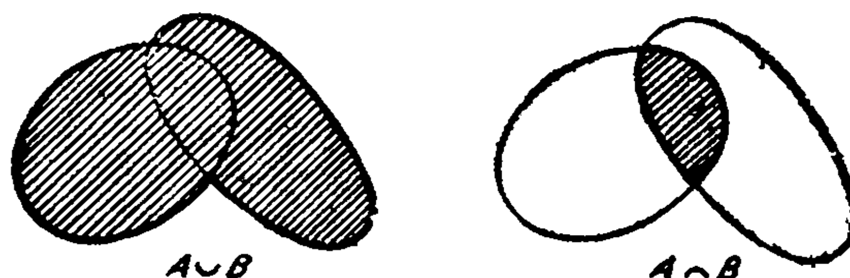
14) $A + O = A$ 15) $A.I = A$

16) $A + I = I$ 17) $A.O = O$

18) Quan hệ $A \subseteq B$ là tương ứng với một trong hai hệ thức $A + B = B$, $AB = A$.

Việc thử lại tất cả những định luật đó là việc của bản thân logic sơ cấp. Chẳng hạn, qui tắc 10) xác nhận rằng, tập hợp các phần tử được chứa hoặc trong A hoặc trong A, chính là tập hợp A; qui tắc 12) xác nhận rằng tập hợp những phần tử thuộc A đồng thời thuộc B hoặc thuộc C, trùng với tập hợp các phần tử đồng thời nằm trong A và trong B hoặc đồng thời nằm trong A và trong C. Những lập luận logic được dùng để chứng minh các qui tắc tương tự sẽ được minh họa một cách thuận lợi nếu như ta qui ước biểu thị các tập hợp A, B, C... dưới dạng những hình phẳng nào đó và lưu ý sao cho không bỏ sót một khả năng logic nào có thể xảy ra khi đề cập đến sự có những phần tử chung của hai tập hợp hoặc ngược lại đề cập đến sự có những phần tử trong một tập hợp này nhưng không thuộc tập hợp khác.

Tất nhiên bạn đọc cần lưu ý đến các định luật 6), 7), 8), 9), 12) về hình thức giống với các định luật giao hoán,



H. 26. Hợp và giao của các tập hợp.

kết hợp và phân phối của đại số học thông thường. Từ đó suy ra mọi qui tắc của đại số học thông thường rút ra từ những định luật đó cũng đúng trong đại số tập hợp. Ngược lại, những định luật 10) 11) và 13) không có những định luật tương tự trong đại số học thông thường, chúng cho đại số tập hợp một cấu trúc đơn giản hơn. Chẳng hạn, công thức nhị thức trong đại số tập hợp dẫn tới một đẳng thức đơn giản:

$$(A + B)^n = (A + B) . (A + B) . . . (A + B) = A + B$$

điều này suy ra từ định luật 11). Các định luật 14), 15) và 17) nói rằng các tính chất của các tập hợp 0 và I đối với các phép toán hợp và giao của các tập hợp là khá giống các tính chất của số 0 và 1 đối với các phép toán cộng và nhân các số. Nhưng định luật 10) kkông có cái tương tự trong đại số thông thường. Đây là định nghĩa của một phép tính khác nữa trong đại số tập hợp. Giả thử A là một tập con tùy ý của tập hợp vũ trụ I. *Phần bù* của A trong I là tập hợp các phần tử của I không thuộc A. Ta đưa vào cho tập hợp này ký hiệu A'. Chẳng hạn, nếu I là tập hợp các số tự nhiên, A là tập hợp các số nguyên tố thì A' là tập hợp chứa tất cả các hợp số và số 1. Phép toán chuyển từ A đến A' không có cái tương tự trong đại số thông thường và có những tính chất sau đây:

19) $A + A' = I$; 20) $A.A' = O$; 21) $O' = I$;

22) $I' = O$;   23) $A'' = A$;

24) Quan hệ $A \subset B$ tương đương với quan hệ $B' \subset A'$

25) $(A + B)' = A'B'$; 26) $(AB)' = A' + B'$.

Chúng tôi dành bạn đọc thử lại những tính chất đó. Các định luận 1) — 26) là cơ sở của đại số tập hợp. Chúng có « tính chất đối ngẫu » đặc biệt sau đây: *Nếu trong một định luật bất kỳ từ 1) — 26) ta thay thế lẫn nhau từng cặp các ký hiệu* $\subset$ và $\supset$; O và I; + và. *thì kết quả vẫn là một trong những định luật đó.* Chẳng hạn, định luật 6) chuyển thành định luật 7), 12) thành 13) 17) thành 16) v.v... Từ đó suy ra mỗi định lý rút ra từ các *định luật 1) — 26) tương ứng với một định lý khác « đối ngẫu » với nó, thu được từ định lý thứ nhất bằng cách hoán vị các ký hiệu đã nói ở trên.* Thực vậy, bởi vì việc chứng minh định lý thứ nhất là việc ứng dụng liên tiếp (trong những giai đoạn khác nhau của các lập luận) một số định luật 1) — 26) thì việc ứng dụng các định luật « đối ngẫu » trong các giai đoạn tương ứng sẽ tạo nên chứng minh của định lý « đối ngẫu » (cũng tương tự như tính đối ngẫu), trong hình học, xem chương IV)

2. Áp dụng vào logic toán. Sự thử lại các định luật của đại số tập hợp là dựa trên sự phân tích ý nghĩa logic của các quan hệ $A \subset B$ và các phép toán $A + B$, AB và A'. Bây giờ ta có thể xem các định luật 1) — 26) như là cơ sở của « đại số logic ». Nói chính xác hơn: phần của logic, tiếp cận các tập hợp hoặc các tính chất của sự vật được xem xét, có thể qui về một hệ thống đại số hình thức dựa trên các định luật 1) — 26). « Vũ trụ qui ước » về mặt logic xác định tập hợp I, *mỗi tính chất U xác định một tập hợp A gồm những sự vật trong*

x có tính chất đó. Quy tắc phiên dịch các thuật ngữ logic thông thường sang ngôn ngữ tập hợp thể hiện trong các thí dụ sau đây:

« A hoặc B » : $A + B$

« A và B » : AB

« không A » : A'

« không A, không B »: $(A + B)'$ hoặc $A'B'$

« không phải vừa A vừa B »: $(AB)'$ hoặc $A' + B'$

« Mọi A là B » hoặc « Nếu A, thì B » hoặc « Từ A suy ra B »	$A \subset B$
« Một A nào đó là B	$AB \neq 0$
« không có A nào không là B »	$AB = 0$
« Một A nào đó không là B »	$AB' \neq 0$
« Không có A nào »	$A = 0$

Trong thuật ngữ của đại số tập hợp, tam đoạn luận « Barbara » biểu thị « nếu mọi A là B và mọi B là C, thì mọi A là C » sẽ có dạng đơn giản:

3) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

Tương tự « luật mâu thuẫn » khẳng định rằng « một sự vật không thể đồng thời có và không có một tính chất nào đó » được viết dưới dạng: 20) $AA' = 0$; còn « luật bài trung » nói rằng « mọi sự vật hoặc có, hoặc không có một tính chất nào đó » được viết dưới dạng 19) $A + A' = I$. Bởi thế phần của logic được biểu thị bằng các thuật ngữ của ký hiệu $\subset$, $+$, . và (') có thể được coi như một hệ đại số hình thức tuân theo các định luật 1 — 26). Dựa vào sự hòa hợp của giải tích logic toán học và giải tích toán học logic thì một ngành toán học mới đã được hình thành — logic toán — một ngành mà hiện nay đang phát triển mạnh mẽ. Với quan

điềm tiền đề, ta chú ý đến một sự kiện đặc biệt là các khẳng định 1) — 26) cùng với mọi định lý khác của đại số tập hợp có thể suy ra được một cách logic từ ba đẳng thức sau đây

$$A + B = B + A$$
$$27)\ (A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(A' + B')' + (A' + B)' = A$$

Từ đó suy ra có thể xây dựng đại số tập hợp như một lý thuyết suy diễn thuần túy giống như hình học Ơclid, dựa vào ba mệnh đề đó coi như các tiên đề. Nếu các tiên đề đó được thực hiện thì phép toán AB và quan hệ $A \subset B$ sẽ *được định nghĩa* theo thuật ngữ $A + B$ và A':

AB biểu thị tập hợp $(A' + B')'$

$A \subset B$ biểu thị rằng $A + B = B$.

Một hệ thống toán học gồm tám số 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, trong đó $a + b$, theo định nghĩa biểu thị bội chung nhỏ nhất của a và b, ab biểu thị ước chung lớn nhất của a và b, $a \subset b$ biểu thị khẳng định « b chia hết cho a » và a' biểu thị số 30/a, thỏa mãn mọi định luật hình thức của đại số tập hợp cũng là một thí dụ hoàn toàn khác. Sự tồn tại những thí dụ như vậy kéo sự nghiên cứu các hệ thống đại số tổng quát thỏa mãn các định luật 27). Những hệ thống như vậy được gọi là « các đại số Bul » — để kỷ niệm Giocgiơ Bul (1815 — 1864), nhà toán học và logic học Anh với cuốn sách của ông « An investigation ofthe laws of thought »[1] ra đời năm 1854.

3. *Một áp dụng vào lý thuyết xác suất* Đại số tập hợp có quan hệ gần gũi nhất với lý thuyết xác suất, cho phép ta nhìn lý thuyết này theo một quan điểm mới. Ta xét một thí dụ đơn giản nhất: ta hình dung một phép thử với một số hữu hạn các kết cục có thể mà ta

---

1. « Sự nghiên cứu các định luật của tư duy ».

cho rằng « đồng khả năng ». Chẳng hạn, phép thử có thể là việc rút hú họa một con bài trong một cổ bài đã xóc kỹ. Nếu ta biểu thị tập hợp các kết cục là I, còn A biểu thị cho một tập con nào đó của I, thì xác suất để cho kết cục của phép thử thuộc vào tập con A được xác định bởi tỉ số:

$$p(A) = \frac{\text{số phần tử của A}}{\text{số phần tử của I}}$$

Nếu ta qui ước biểu thị số phần tử của tập hợp A nào đó là n (A) thì đẳng thức trên sẽ có dạng:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(I)} \qquad (1)$$

Trong thí dụ này, giả thử A là tập hợp các con «nhép» ta có $n(A) = 13$, $n(I) = 52$ và $p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Các tư tưởng của đại số tập hợp được phát lộ ra trong khi tính xác suất nếu đã biết xác suất của một số tập hợp cần tính xác suất của các tập hợp khác. Thí dụ, biết xác suất p (A), p (B) và p (AB), có thể tính được xác suất $p(A + B)$:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB) \qquad (2)$$

Việc chứng minh không có khó khăn gì. Ta có:

$$n(A + B) = n(A) + n(B) - n(AB)$$

bởi vì các phần tử được chứa đồng thời trong A và trong B, tức là các phần tử của AB được xét đến hai lần trong khi tính tổng $n(A) + n(B)$, nghĩa là cần trừ $n(AB)$ vào tổng đó để cho việc tính $n(A + B)$ được thực hiện đúng. Sau đó chia cả hai vế của đẳng thức cho $n(I)$ ta được hệ thức (2).

Nếu xét ba tập hợp A, B, C trong I ta được một công thức lý thú hơn. Dùng hệ thức (2) ta có:

$$p(A + B + C) = p[(A + B) + C] = p(A + B) +$$
$$+ p(C) - p[(A + B) + C]$$

Định luật 12) trong mục trên cho ta:
$(A + B)C = AC + BC$. Từ đó suy ra:
$$p[(A + B)C] = p(AC + BC) = p(AC) + p(BC) + p(ABC) \quad (3)$$
Để làm thí dụ, ta xét phép thử sau. Ba chữ số 1, 2, 3 được viết theo một trật tự tùy ý. Xác suất để cho ít nhất một trong các chữ số đó nằm ở vị trí đúng của nó (tính theo thứ tự) là bao nhiêu? Giả thử A là tập hợp các hoán vị trong đó chữ số 1 đứng ở vị trí thứ nhất, B là tập hợp các hoán vị trong đó chữ số 2 ở vị trí thứ hai, C là tập hợp các hoán vị trong đó chữ số 3 đứng ở vị trí thứ ba. Ta cần tính $p(A + B + C)$. Rõ ràng:
$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$
Thực vậy, nếu một chữ số tùy ý đứng ở vị trí đúng của nó thì có hai khả năng hoán vị hai chữ số còn lại trong số $3.2.1 = 6$ các hoán vị có thể của ba chữ số. Hơn nữa,
$$p(AB) = p(AC) = p(BC) = \frac{1}{6}; \quad p(ABC) = \frac{1}{6}$$ vì chỉ xảy ra một trong các trường hợp đó. Khi đó công thức (3) cho ta:
$$p(A + B + C) = 3.\frac{1}{3} - 3.\frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0{,}666...$$

- *otoanhoc2911@gmail.com* -

MỤC LỤC

CHƯƠNG I

SỐ TỰ NHIÊN

CHƯƠNG II

HỆ THỐNG SỐ TOÁN HỌC

R. COURANT H. ROBBINS

TOÁN HỌC LÀ GÌ?

TẬP 1

Người dịch : **HÀN LIÊN HẢI**
Biên tập : **ĐỖ ĐỨC ỨNG**
Sửa bản in : **ĐỖ ĐỨC ỨNG**
Trình bày bìa :

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

In 5100 bản, khổ 13 × 19, tại nhà máy in Tiến Bộ — Hà Nội.
Số XB 23/84 Số in: 647. Nộp lưu chiểu tháng 10 năm 1984.

Giá : 8,00đ